

Федеральное государственное образовательное
учреждение высшего профессионального
образования “Московский физико-технический
институт (государственный университет)”

Кафедра Физики Высоких Энергий

Выпускная квалификационная работа

Исследование примаковского процесса
 $\pi^- \text{Pb} \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^- \text{Pb}$ при массе $M_{3\pi} < 0.72$ ГэВ в
эксперименте ВЕС.

Шумаков Антон Анатольевич^{1,2}

Научный руководитель:

Ивашин Антон Владимирович²

¹Московский физико-технический институт, МФТИ, Долгопрудный

²НИЦ «Курчатовский институт» – ИФВЭ, Протвино

Протвино, 2017

Аннотация

В данной работе производится предварительный анализ данных на свинцовой мишени набранных на ВЕС впервые в конце 2016 года. Для выделения примаковского процесса в $\pi^- \text{Pb} \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^- \text{Pb}$ применяется формализм ПВА. Приводится проверка работоспособности написанного специально для этого программного комплекса. Обсуждаются вопросы, связанные с применением ПВА в области малых инвариантных масс и малых передач импульса. Наблюдается указание на наличие примаковской компоненты.

Содержание

1	Введение	4
2	Экспериментальная установка	5
2.1	Общее описание	5
2.2	Отбор событий	6
3	ПВА	8
3.1	Общие положения	8
3.2	Выражение для амплитуды	9
3.3	Параметризация изобар	12
3.4	Функция правдоподобия	13
3.5	Особенности программного исполнения	16
4	Самосогласованность	17
5	Анализ $\pi^- \text{Be} \rightarrow \pi^- \pi^- \pi^+ \text{Be}$	19
5.1	Сеанс №44	19
5.2	Сеанс №50	20
6	Анализ $\pi^- \text{Pb} \rightarrow \pi^- \pi^- \pi^+ \text{Pb}$	22
6.1	Весь диапазон масс	22
6.2	Малые t' и малые массы	22
6.2.1	Киральная амплитуда	23
6.2.2	Тест согласованности	26
6.2.3	Результаты	27
7	Заключение	27
8	Приложения	30
8.1	Набор волн для анализа	30
8.2	Результаты анализа сеанса №44	31
8.3	Результаты анализа сеанса №50 на бериллиевой мишени	39
8.4	Результаты анализа сеанса №50 на свинцовой мишени	47

1 Введение

Для адронных взаимодействий при маленьких энергиях квантовая хромодинамика (КХД) может быть сформулирована в терминах эффективной теории поля получающейся из использования киральной симметрии и её спонтанного нарушения. Такая эффективная теория называется киральной пертурбативной теорией (ChPT). В этом подходе пи-мезоны являются голдстоуновскими бозонами, связанными со спонтанным нарушением киральной симметрии. Изучение свойств пи-мезонов и их взаимодействий является хорошей проверкой корректности использования ChPT как низкоэнергетического представления КХД.

В данной работе будет исследоваться процесс $\pi\gamma \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^-$ с помощью рассеяния пионов на тяжёлом ядре). Для этого процесса существует теоретическое предсказание [12], [13] и один экспериментальный результат [14]. Целью данной работы является предварительный анализ данных на свинцовой мишени набранных на ВЕС впервые в конце 2016 года (сеанс 50). Результаты данной работы предназначены в основном для точного количественного прогнозирования дальнейшей работы ВЕС в этой области. Будет дан ответ на вопрос, сколько пучкового времени требуется в зависимости от толщины мишени, чтобы получить результат, конкурентоспособный с COMPASS, и тем самым обеспечить второе независимое измерение процесса. Также будет дан ответ на вопрос о том, можно ли надёжно отделить интересующий нас процесс от возможных паразитных фонов.

Изучать данную реакцию предлагается в рассеянии пионов на свинцовой мишени $\pi^-Pb \rightarrow \pi^-\pi^-\pi^+Pb$. Благодаря большому заряду ядра обмен фотоном становится одним из доминирующих вкладов. Данный тип реакций относится к примаковским реакциям, где налетающая частица взаимодействует с квазиреальным фотоном поля ядра. Сечение взаимодействия пиона с ядром связано с сечением взаимодействия пиона с фотоном известным приближением эквивалентных фотонов.

$$\frac{d\sigma_{Pb}}{dsdt'd\Phi} = \frac{Z^2\alpha}{\pi(s - m_\pi^2)} \cdot F_{\text{eff}}(t') \cdot \frac{t'}{(t' + |t|_{\text{min}})^2} \cdot \frac{d\sigma_\gamma}{d\Phi} \quad (1)$$

Здесь $d\Phi$ - элемент 3-частичного фазового объёма конечной системы трёх пионов, Z - заряд ядра, $F_{\text{eff}}(t')$ - форм-фактор ядра, $s = (M_{3\pi})^2$, $t = (p_{\text{beam}} - p_{\pi^+\pi^-\pi^-})^2$, $t' = |t| - |t|_{\text{min}}$, где $|t|_{\text{min}} = (s - m_\pi^2)^2 / (4E_{\text{beam}}^2)$. Благодаря указанной t' -зависимости основной вклад от данной реакции приходится на диапазон малых передач импульса, ибо у распределения (1) пик при $t' \approx |t|_{\text{min}}$.

2 Экспериментальная установка

2.1 Общее описание

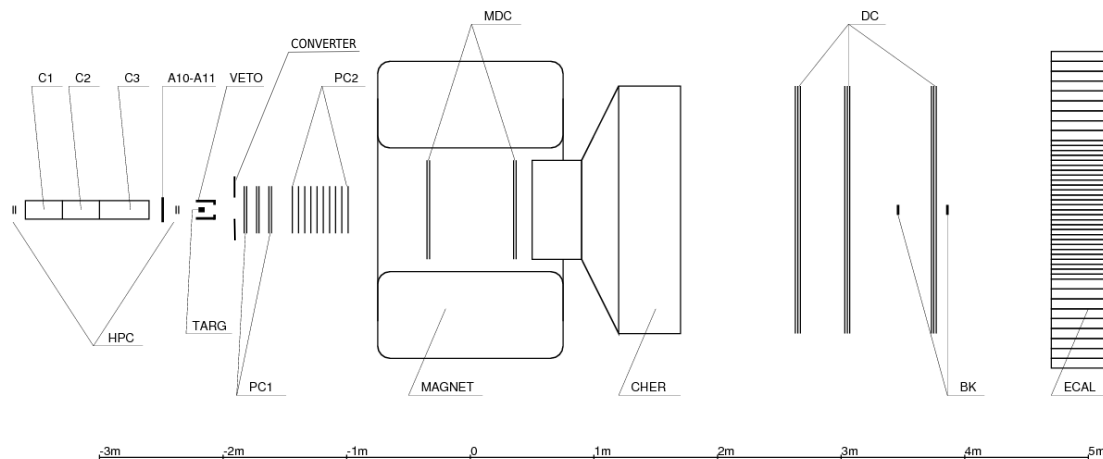


Рис. 1: Схема установки.

Установка ВЕС является широкоапертурным магнитным спектрометром, предназначенным для регистрации заряженных треков и γ -квантов, возникающих при взаимодействии пучковой частицы в фиксированной мишени. Принята система координат, в которой ось Y направлена вертикально вверх, ось Z - по пучку, а ось X дополняет тройку до правой. Начало расположено в центре магнита. На рисунке 1 изображено YZ сечение установки, пучковая часть изображена не в масштабе. Установка состоит из следующих детекторов:

1. Пучковые сцинтилляционные счётчики $S1$, $S2$, $S3$ (на рисунке не показаны, расположены до мишени).
2. Пучковые черенковские счётчики $C1$, $C2$, $C3$.
3. Четыре двухплоскостные пучковые пропорциональные камеры HPC .
4. Счётчик $A10-A11$ для подавления гало пучка. Представляет из себя пластину сцинтиллятора с вырезанным круглым отверстием.
5. Мишень $TARG$.
6. Охранная система $VETO$.
7. Свинцовая пластина $CONVERTER$, предназначенная для детектирования в камерах $PC1$ фотонов, которые не попадают в электромагнитный калориметр.
8. Группа пропорциональных камер $PC1$. Состоит из трёх двухплоскостных камер. Третья камера повернута на угол 15° вокруг оси Z .

9. Группа пропорциональных камер *PC2*. Состоит из пяти двухплоскостных камер.
10. Магнит *MAGNET*.
11. Группа микродрейфовых камер внутри магнита *MDC*.
12. Группа больших дрейфовых камер на основе трубок *DC*.
13. Большой многоканальный пороговый черенковский счётчик *CHER*.
14. Beam-killers *BK*.
15. Электромагнитный калориметр *ECAL*.

Пучок, направляемый в установку, состоит из π^- (97.4%), K^- (2.3%), \bar{p} (0.2%), e^- (0.1%). Энергия пучка 29 ГэВ, разброс $\sigma \approx 0.2$ ГэВ. Установка получает вторичный пучок отрицательных пионов от ускорителя У-70 (ИФВЭ, Протвино), длительность цикла У-70 9.5 секунд, из них сброс частиц на ВЕС происходит в течение 1-2 секунд. Интенсивность пучка пионов $\sim 1.5 \cdot 10^6$ частиц/с.

Мишень представляет собой либо круглую пластину свинца толщиной 1.1 мм (0.2 рад. длины) и диаметром 4.5 см, либо бериллиевый цилиндр толщиной 4 см (0.11 рад. длин) и диаметром 4.5 см.

Триггер установки является следующей комбинацией условий $S1 \cdot S2 \cdot S3 \cdot !A10 \cdot !A11 \cdot !BK1 \cdot !BK2$. Для сеансов с бериллиевой мишенью добавляется ещё и условие отсутствия сигнала в первом слое охранной системы *VETO*.

2.2 Отбор событий

Для анализа отбираются события, обладающие следующими признаками.

1. Один трек, соответствующий положительно заряженной частице.
2. Два трека, соответствующие отрицательно заряженным частицам.
3. Не более одного гамма-кванта.
4. Энергия гамма кванта, если он есть, меньше 0.5 ГэВ.
5. Все треки (в том числе и пучковый) формируют одну или две вершины.
6. Координаты x и y вершины, в которую входит пучок, находятся в пределах мишени.
7. Координата z вершины, в которую входит пучок, находится внутри мишени или в пределах 4 см от торцов мишени.
8. Треки не проходят через beam-killer'ы.
9. Треки не проходят через конвертер.
10. Пучковая частица идентифицирована как пион.

11. Значение реконструированного импульса пучка лежит между 27 и 31 ГэВ.
12. Отношение энергии кластера в калориметре, ассоциированного с треком, к импульсу этого трека превышает 0.87 не более чем для одного трека.

Рассмотрим подробнее некоторые обрезания.

В конечном состоянии существует фоновый к изучаемой реакции процесс $e^-Pb \rightarrow e^- \gamma Pb, \gamma \rightarrow e^- e^+$. Для отсеечения событий с электроном в начальном состоянии используются два из трёх пучковых черенковских счётчиков. Для отсеечения событий с электронами в конечном состоянии используется электромагнитный калориметр. Наличие подобных фоновых событий можно увидеть по распределению реконструированного импульса пучка (см. рис. 3.a). Из этого распределения видно, что фоновые события расположены и под упругим пиком, поэтому обрезание по нему приведёт только к частичному исчезновению фона. Если построить отношение энергии кластера в калориметре к импульсу трека, который ассоциирован с ним, то в районе $E/p \approx 1$ можно наблюдать небольшой пик (см. рис. 2). Он соответствует частицам, которые почти всё свою энергию теряют в электромагнитном калориметре. Такое поведение свойственно для электронов, поэтому используется указанное обрезание. Результат применения обрезания можно наблюдать на рисунке 3.b.

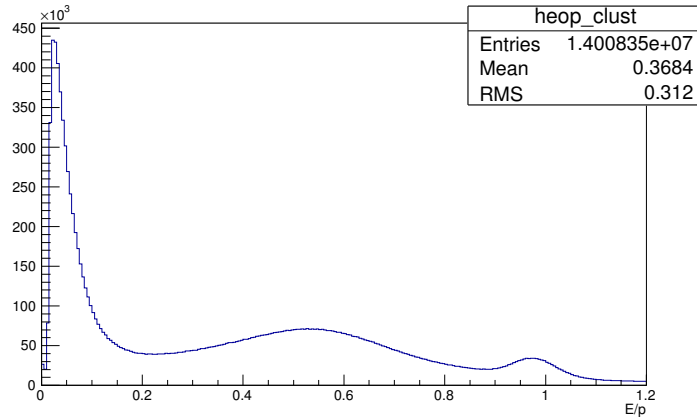


Рис. 2: Отношение энергии кластера к энергии трека, ассоциированного с ним.

События, прошедшие все отборы будут подвергаться дальнейшему анализу. На рисунке 4 можно видеть распределения по инвариантной массе и t' . На рисунке 4.b также приведена попытка фита распределения по t' экспонентой. Видно, что большую часть событий составляют когерентные на ядре события с параметром экспоненты $b_{Pb} \approx 400 \text{ ГэВ}^{-2}$. Однако существует неопределение в области малых t' , которое вызвано наличием примаковских событий. Для выделения этих событий предлагается использовать парциально-волновой анализ.

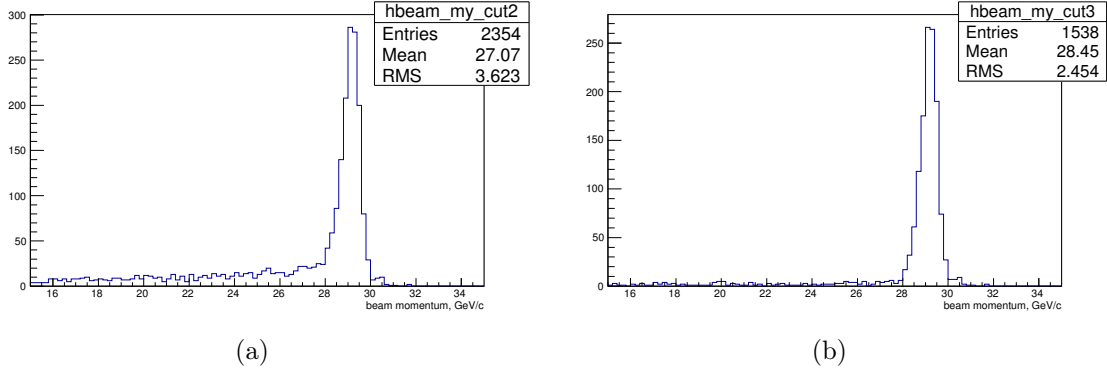


Рис. 3: Реконструированный импульс пучка для событий, расположенных в интересующей нас области масс $m < 0.72$ ГэВ и $t' < 0.001$ ГэВ² и прошедших все отборы. (а) без обрезания по калориметру, (б) с обрезанием по калориметру.

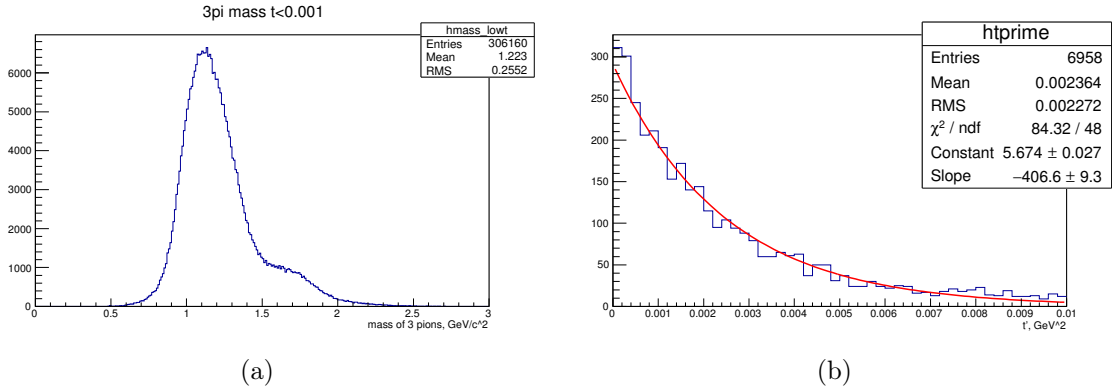


Рис. 4: (а) Инвариантная масса системы трёх пионов для $t' < 0.001$ ГэВ². (б) t' для событий с инвариантной массой $m < 0.72$ ГэВ

3 ПВА

3.1 Общие положения

В случае нашего анализа ПВА применяется к системе трёх частиц. Исследуемый регион по инвариантной массе m системы трёх частиц и по t' делится на бины. В нашем случае ширина бинов по массе составляет 20 или 40 МэВ, а ширина по t' варьируется от 0.001 ГэВ² для малых t' до 0.15 ГэВ² для больших. В каждом бине анализ выполняется независимо. ПВА пытается описать угловые распределения и распределение по диаграмме Далитца событий в бине с помощью некоторой амплитуды. Параметризация этой амплитуды устроена таким образом, что можно выделить отдельно интенсивности волн с различными спинами. Одним из предположений, которые делаются при проведении трёхчастичного ПВА является изобарная модель. Считается, что распад некоего объекта на три пиона происходит в два этапа. Сначала объект распадается на изобару и пион, а затем изобара распадается на два пиона. В качестве изобары могут выступать, например, ρ и f_2 мезоны. Для учёта акцептанса установки используется расширенный метод максимума правдоподобия.

3.2 Выражение для амплитуды

Получим выражение для амплитуды, используемой в ПВА. Рассмотрим реакцию $a + b \rightarrow 1 + 2 + 3 + 4$, где $a, 1, 2, 3$ - бесспиновые мезоны. Амплитуда такой реакции выглядит как

$$f_{\lambda_b \lambda_4} = \langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4 \lambda_4 | U | \mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b \lambda_b \rangle,$$

где все величины соответствуют системе центра масс всех частиц. λ_b, λ_4 - спиральности частиц b и 4 соответственно. Для начала выделим некую произвольную пару конечных частиц (в этом случае выбрана пара (23)) и сменим систему координат.

$$f_{\lambda_b \lambda_4} = \langle \mathbf{p}_{123} \Phi \Theta M_{23} \psi \chi | U | \mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b \lambda_b \rangle, \quad (2)$$

где $\mathbf{p}_{123} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3$, Φ и Θ - азимутальный и полярный углы импульса димезона в системе центра масс трёх частиц, сконструированной таким образом, что направление пучка определяет ось z , а ось y перпендикулярна плоскости реакции. В данной системе плоскость реакции сформирована векторами импульса пучка и импульса отдачи. Эту систему так же называют системой Готфрида-Джексона. ψ и χ - азимутальный и полярный углы импульса одного из мезонов в системе центра масс димезона. Система сконструирована из системы Готфрида-Джексона поворотом оси z по импульсу димезона и последующим бустом вдоль оси z в систему покоя димезона. Получившуюся систему так же называют спиральной. Подробное описание используемых систем отсчёта можно найти в [15]. Базис конечных состояний с конкретными углами может быть выражен через базис состояний с фиксированными значениями углового момента и спиральности.

$$\langle \mathbf{p}_{123} \Phi \Theta M_{23} \psi \chi | \mathbf{p}_{123} J \Lambda M_{23} j \lambda \rangle = \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} D_{\Lambda\lambda}^{J*}(\Phi, \Theta, 0) D_{\lambda_0}^{j*}(\psi, \chi, 0),$$

где J, Λ - момент и спиральность системы (123), а j, λ - момент и спиральность выбранной системы (23). Подставляя это в (2) получаем

$$f_{\lambda_b \lambda_4} = \sum_{J\Lambda j\lambda} \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} D_{\Lambda\lambda}^{J*}(\Phi, \Theta, \psi) d_{\lambda_0}^j(\chi) \langle \mathbf{p}_{123} J \Lambda M_{23} j \lambda | U | \mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b \lambda_b \rangle =$$

$$\sum_{J\Lambda j\lambda} \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} D_{\Lambda\lambda}^{J*}(\Phi, \Theta, \psi) d_{\lambda_0}^j(\chi) g_{\Lambda\lambda_b\lambda_4}^{Jj}(s, t, m, M_{23}), \quad (3)$$

где введена $g_{\Lambda\lambda_b\lambda_4}^{Jj}(s, t, m, M_{23})$ - амплитуда вероятности получить из начального состояния, состояние с конкретными значениями J, Λ, j, λ . Далее заменим в избранном базисе λ на l - угловой момент между димезоном и третьим мезоном.

$$g_{\Lambda\lambda_b\lambda_4}^{Jj}(s, t, m, M_{23}) = \sum_l \sqrt{\frac{2l+1}{2J+1}} \langle l 0 j \lambda | J \lambda \rangle h_{\Lambda\lambda_b\lambda_4}^{Jjl}(s, t, m, M_{23}), \quad (4)$$

где $\langle l 0 j \lambda | J \lambda \rangle$ - коэффициенты Клебша-Гордона.

Выбранные состояния кроме всего прочего в системе (123) являются состояниями с определённой чётностью $P = \eta_1 \eta_2 \eta_3 (-1)^{l+j}$. Поэтому можно включить чётность в индексы состояний.

До этого момента мы во многом повторяли вывод [1], но в этом месте для ускорения вычислений было решено не менять систему координат, а сразу ввести натуральность.

Рассмотрим сначала процесс, где пучок движется вдоль z , а (123) рождается в плоскости zx . Если применить преобразование четности, то пучок станет двигаться вдоль $-z$ (то есть противоположно). Однако если довернуть дополнительно на π относительно оси y , то все импульсы совпадут с непреобразованным состоянием. Однако все спиральности поменяют знак. Поэтому после преобразования $\hat{Y} = e^{-i\pi\hat{J}_y}\hat{P}$ амплитуда $f_{\Lambda\lambda_b\lambda_4}$ будет равна $f_{-\Lambda-\lambda_b-\lambda_4}$ для преобразованной реакции. Поскольку чётность сохраняется, то

$$f_{\Lambda\lambda_b\lambda_4} = S f_{-\Lambda-\lambda_b-\lambda_4},$$

где знак S определяется соглашениями относительно преобразования чётности: $S = P(-1)^{J-\Lambda}$, где P зависит только от λ_b , λ_4 и внутренней чётности частиц. Поскольку в матрице плотности осуществляется суммирование по спиральностям, то для элементов матрицы плотности получаем:

$$\rho_{\Lambda\Lambda'} = (-1)^{\Lambda-\Lambda'} \rho_{-\Lambda-\Lambda'}.$$

То есть имеем нетривиальные условия связывающие, разные элементы матрицы плотности. Это не удобно и является основной причиной введения другого представления для амплитуды. Очевидно причина неудобства в том, что \hat{Y} переводит Λ в $-\Lambda$. Определим

$$|J^P \Lambda j l \eta\rangle = c_\Lambda (|J^P \Lambda j l\rangle + \eta P (-1)^{J+1+\Lambda} |J^P - \Lambda j l\rangle), \quad (5)$$

где $c_\Lambda = \sqrt{\frac{1}{2}}$ для $\Lambda \neq 0$ и $c_\Lambda = \frac{1}{2}$ для $\Lambda = 0$. Тогда

$$\hat{Y} |J^P \Lambda j l \eta\rangle = -\eta |J^P \Lambda j l \eta\rangle,$$

где η мы будем называть натуральностью, поскольку при определенных условиях это число совпадает с натуральностью обмена в смысле реджевской теории, но в общем случае не совпадает с ним. Тогда очевидно, то условия на элементы матрицы плотности сводятся к

$$\rho_{\Lambda\Lambda'\eta\eta'} = \eta\eta' \rho_{\Lambda\Lambda'\eta\eta'}$$

Очевидно, что при $\eta \neq \eta'$ имеем $\eta\eta' = -1$, что ведёт к обращению в нуль соответствующего элемента, поэтому матрица плотности является диагональной по натуральности.

Используя (5) и свойство D-функций

$$D_{-\Lambda-\lambda}^{J*}(\Phi, \Theta, \psi) = (-1)^{\Lambda-\lambda} D_{\Lambda\lambda}^J(\Phi, \Theta, \psi)$$

получаем выражение для амплитуды:

$$f_{\lambda_b\lambda_4} = \sum_{J(\Lambda \geq 0) j \lambda l \eta} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} \langle l 0 j \lambda | J \lambda \rangle c_\Lambda d_{\lambda_0}^j(\chi) \cdot (D_{\Lambda\lambda}^{J*}(\Phi, \Theta, \psi) + \eta P (-1)^{J+1+\Lambda} D_{-\Lambda\lambda}^J(\Phi, \Theta, \psi)) h_{\Lambda\lambda_b\lambda_4}^{J^P j l \eta}(s, t, m, M_{23}). \quad (6)$$

В самом начале раздела был закреплён выбор пары частиц, образующих димезон. Естественно, что эту пару можно выбирать разными способами и это не повлияет на последующий вывод амплитуды. Но если использовать изобарную модель, то станет видно, что для конкретной изобары предпочтительным оказывается представление, в котором в качестве димезона выбрана пара, образующаяся после распада изобары. Основная часть амплитуды в таком “правильном” представлении сосредотачивается в членах с j соответствующем спину изобары, тогда как другие представления “размазывают” изобару по всем j . Предполагается, что этими “размазанными” членами можно пренебречь. Также из-за того, что высокоспиновые резонансы подавлены вводится, обрезание по J и по l . Поэтому выражение для амплитуды выглядит так:

$$f_{\lambda_b \lambda_4} = \sum_{J(\Lambda \geq 0) j n l \eta}^{J_{max} l_{max}} G_{\Lambda \lambda_b \lambda_4}^{J^P j n l \eta} h_{\Lambda \lambda_b \lambda_4}^{J^P j n l \eta}(s, t, m, M_n),$$

где n - номер пары, в которой рождается изобара. ($n = 1$ для (23)) Каждая уникальная пара индексов ($j n$) описывает изобару со спином j в димезоне n .

Таким образом мы сделали h зависимым от изобары.

$$h_{\Lambda \lambda_b \lambda_4}^{J^P j n l \eta}(s, t, m, M_n) = \bar{h}_{\Lambda \lambda_b \lambda_4}^{J^P j n l \eta}(s, t, m) BW^{j n}(m, M_n)$$

Здесь в функцию BW запрятана динамика распада изобары и некоторые общие динамические факторы.

В итоге амплитуда составлена из коэффициентов $\bar{h}_{\Lambda \lambda_b \lambda_4}^{J^P j n l \eta}$ и из функций

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_a = & \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} \langle l 0 j \lambda | J \lambda \rangle c_{\Lambda} d_{\lambda 0}^j(\chi) \cdot BW^{j n}(m, M_n) \cdot \\ & \cdot (D_{\Lambda \lambda}^{J*}(\Phi, \Theta, \psi) + \eta P(-1)^{J+1+\Lambda} D_{-\Lambda \lambda}^J(\Phi, \Theta, \psi)) \end{aligned} \quad (7)$$

В этом выражении мы вводим индекс a описывающий в себе комбинацию индексов $J^P l \eta \Lambda$ и изобару. Такие функции мы в дальнейшем и будем называть волнами.

Квадрат амплитуды вычисляется следующим образом:

$$\omega = \sum_{\lambda_b \lambda_4} f_{\lambda_b \lambda_4}^* f_{\lambda_b \lambda_4}.$$

Это приводит нас к определению матрицы плотности

$$\rho_{aa'}(s, t, m) = \sum_{\lambda_b \lambda_4} \bar{h}_{a \lambda_b \lambda_4} (\bar{h}_{a' \lambda_b \lambda_4})^*.$$

В реальном анализе выбранный набор волн может не полностью описывать систему. Для компенсации вклада волн, которые по тем или иным причинам не учитываются в анализе, вводится дополнительный параметр, соответствующий равномерному по фазовому объёму некогерентному вкладу в интенсивность I_{flat} . В дальнейшем он будет неявно присутствовать в каждом приведённом наборе волн. На выкладках в последующих разделах это никак не отразится, ибо его можно считать дополнительным блоком матрицы плотности, состоящим из одного элемента с соответствующей амплитудой $\mathcal{M}_{\text{flat}} = 1$.

3.3 Параметризация изобар

В предыдущем разделе были упомянуты функции $BW^{jn}(m, M_n)$. Распишем их подробнее.

$$BW^{jn}(m, M_n) = F_l(m, M_n, m_\pi) F_j(M_n, m_\pi, m_\pi) \Delta(M_n)$$

Здесь Δ описывает форму резонансной кривой для выбранной нами изобары, а функции F - барьерные факторы Блатта-Вайскопфа из [17]. Используется параметризация из [18]. Ниже используется q - величина импульса одного из продуктов в системе центра масс распадающейся системы. $z \equiv (q/q_R)^2$, где размерный параметр $q_R = 197.3$ МэВ, что соответствует предполагаемому сильному взаимодействию на расстоянии 1 фм.

$$\begin{aligned} F_0^2(q) &= 1 \\ F_1^2(q) &= \frac{2z}{z+1} \\ F_2^2(q) &= \frac{13z^2}{z^2+3z+9} \\ F_3^2(q) &= \frac{277z^3}{z^3+6z^2+45z+225} \\ F_4^2(q) &= \frac{12746z^4}{z^4+10z^3+135z^2+1575z+11025} \end{aligned}$$

В большинстве случаев формы резонансных кривых для изобар описываются релятивистской формулой Брейта-Вигнера [16].

$$\Delta(m) = \frac{m_0 \Gamma_0}{m_0^2 - m^2 - im_0 \Gamma(m)}, \quad (8)$$

где m_0 и Γ_0 - масса и ширина резонанса соответственно. Зависимость ширины от массы для одиночного канала распада выглядит как

$$\Gamma(m) = \Gamma_0 \frac{m_0 q}{m q_0} \frac{F_j^2(q)}{F_j^2(q_0)}, \quad (9)$$

где функции F - уже введённые выше барьерные факторы, j - спин резонанса, а q_0 - импульс распада на номинальной массе резонанса.

Для описания $\rho(770)$ и $\rho_3(1690)$ используется другое выражение для зависимости ширины от массы

$$\Gamma(m) = \Gamma_0 \frac{q}{q_0} \frac{F_j^2(q)}{F_j^2(q_0)}, \quad (10)$$

Отдельным образом описывается и совокупность изобар с $J^P = 0^+$. Широкая компонента, которая в дальнейшем будет обозначаться¹ как σ , использует параметризацию Ау-Моргана-Пеннингтона [19] за вычетом относительно узких резонансов $f_0(980)$ и $f_0(1500)$, которые включены отдельно.

¹По историческим причинам иногда можно встретить обозначение EPSMX

$f_0(1500)$ описывается формулой Брейта-Вигнера с постоянной шириной.

$$\Gamma(m) = \Gamma_0 \quad (11)$$

$f_0(980)$ находится недалеко от порога распада на $K\bar{K}$, поэтому описывается формулой Флатте [20]

$$\Delta(m) = \frac{1}{m_0^2 - m^2 - i(\phi_2^{\pi\pi} g_{\pi\pi} + \phi_2^{K\bar{K}} g_{K\bar{K}})}, \quad (12)$$

где $\phi_2 = 2q/m$ – двухчастичный фазовый объём для соответствующего канала распада.

Набор изобар и их параметризация берутся из [15]. Краткое описание всех изобар можно найти в таблице 1.

Таблица 1: Список изобар, используемых в анализе

Изобара	Форма резонансной кривой	Параметры
σ	Формула Ау-Моргана-Пеннингтона [19]	смотреть в [15]
$\rho(770)$	Формула (8) с шириной (10)	$m_0 = 770.0$ МэВ $\Gamma_0 = 150.7$ МэВ
$f_0(980)$	Формула (12)	$m_0 = 965.0$ МэВ $g_{\pi\pi} = 0.165$ ГэВ ² $g_{K\bar{K}}/g_{\pi\pi} = 4.21$
$f_2(1270)$	Формула (8) с шириной (9)	$m_0 = 1275.4$ МэВ $\Gamma_0 = 185.2$ МэВ
$f_0(1500)$	Формула (8) с шириной (11)	$m_0 = 1507.0$ МэВ $\Gamma_0 = 109.0$ МэВ
$\rho_3(1690)$	Формула (8) с шириной (10)	$m_0 = 1688.8$ МэВ $\Gamma_0 = 161.0$ МэВ

3.4 Функция правдоподобия

Пусть у нас есть некоторое исходное распределение с плотностью

$$p(\tau) = \sum \rho_{ij} \mathcal{M}_i(\tau) \mathcal{M}_j^*(\tau)$$

$$\int p(\tau) d\tau = 1$$

где ρ_{ij} – матрица плотности, $\mathcal{M}_i(\tau)$ – парциальные волны, τ – переменные фазового объёма.

В экспериментальной установке наблюдается распределение с плотностью

$$q(\tau) = \frac{\sum \rho_{ij} \mathcal{M}_i(\tau) \mathcal{M}_j^*(\tau) A(\tau)}{\int \sum \rho_{ij} \mathcal{M}_i(\tau) \mathcal{M}_j^*(\tau) A(\tau) d\tau}$$

$$\int p(\tau) d\tau = \int \sum \rho_{ij} \mathcal{M}_i(\tau) \mathcal{M}_j^*(\tau) = 1$$

где $A(\tau)$ – аксептанс экспериментальной установки (интеграл в знаменателе необходим для для нормировки $q(\tau)$ на 1).

Расширенная (то есть с пуассоновскими флуктуациями числа наблюдаемых событий) функция правдоподобия запишется в виде:

$$L_{ext} = \frac{\bar{N}^N e^{-\bar{N}}}{N!} \prod_{k=1}^N q(\tau_k)$$

То есть

$$L_{ext} = \frac{\bar{N}^N e^{-\bar{N}}}{N!} \prod_{k=1}^N \frac{\sum \rho_{ij} \mathcal{M}_i(\tau_k) \mathcal{M}_j^*(\tau_k) A(\tau_k)}{\int \sum \rho_{ij} \mathcal{M}_i(\tau) \mathcal{M}_j^*(\tau) A(\tau) d\tau}$$

$$\int \sum \rho_{ij} \mathcal{M}_i(\tau) \mathcal{M}_j^*(\tau) = 1$$

где максимизация выполняется по переменным ρ_{ij} , \bar{N} .

Заметим, что множитель, зависящий от \bar{N} , полностью факторизуется, поэтому результат максимизации L по ρ_{ij} будет совпадать с результатом максимизации обычной функции правдоподобия (без пуассоновских флуктуаций):

$$L = \prod_{k=1}^N \frac{\sum \rho_{ij} \mathcal{M}_i(\tau_k) \mathcal{M}_j^*(\tau_k) A(\tau_k)}{\int \sum \rho_{ij} \mathcal{M}_i(\tau) \mathcal{M}_j^*(\tau) A(\tau) d\tau}$$

$$\int \sum \rho_{ij} \mathcal{M}_i(\tau) \mathcal{M}_j^*(\tau) d\tau = 1$$

Однако в текущей параметризации возникает существенное неудобство: матрица ρ_{ij} – не произвольная положительно определённая эрмитова, а должна ещё удовлетворять условию нормировки. Сделаем замену переменных, аналогично тому, как это сделано в [21]:

$$\bar{\rho}_{ij} = \frac{\bar{N} \rho_{ij}}{\int \sum \rho_{ij} \mathcal{M}_i(\tau) \mathcal{M}_j^*(\tau) A(\tau) d\tau}$$

Умножая обе части этого равенства на $\mathcal{M}_i(\tau) \mathcal{M}_j^*(\tau) A(\tau)$ и интегрируя по τ получаем, что

$$\bar{N} = \int \sum \bar{\rho}_{ij} \mathcal{M}_i(\tau) \mathcal{M}_j^*(\tau) A(\tau) d\tau$$

Умножая обе части выражения для $\bar{\rho}_{ij}$ на $\mathcal{M}_i(\tau)\mathcal{M}_j^*(\tau)$ и суммируя по i, j и интегрируя по τ получаем, что:

$$\sum \rho_{ij} \int \mathcal{M}_i(\tau)\mathcal{M}_j^*(\tau)A(\tau)d\tau = \frac{\int \sum \bar{\rho}_{ij}\mathcal{M}_i(\tau)\mathcal{M}_j^*(\tau)A(\tau)d\tau}{\int \sum \bar{\rho}_{ij}\mathcal{M}_i(\tau)\mathcal{M}_j^*(\tau)d\tau}$$

Непосредственной подстановкой можно проверить, что следующее выражение для ρ_{ij} является решением этого уравнения:

$$\rho_{ij} = \frac{\bar{\rho}_{ij}}{\int \sum \bar{\rho}_{ij}\mathcal{M}_i(\tau)\mathcal{M}_j^*(\tau)d\tau}$$

Очевидно, что условие нормировки на ρ очевидным образом всегда выполняется для произвольной положительно определённой эрмитовой $\bar{\rho}$. В новой параметризации (переноса множитель \bar{N}^N под знак произведения):

$$L_{ext} = \frac{e^{-\int \sum \bar{\rho}_{ij}\mathcal{M}_i(\tau)\mathcal{M}_j^*(\tau)A(\tau)d\tau}}{N!} \prod_{k=1}^N \sum \bar{\rho}_{ij}\mathcal{M}_i(\tau_k)\mathcal{M}_j^*(\tau_k)A(\tau_k)$$

где $\bar{\rho}$ уже произвольная эрмитова.

Матрица $\bar{\rho}$ имеет прозрачный физический смысл, если парциальные волны ортонормированы, то её диагональный элемент $\bar{\rho}_{ii}$ имеет смысл числа исходных событий (на входе в экспериментальную установку) в парциальной волне $\mathcal{M}_i(\tau)$, это очевидно, поскольку множитель

$$\frac{\bar{N}}{\int \sum \rho_{ij}\mathcal{M}_i(\tau)\mathcal{M}_j^*(\tau)A(\tau)d\tau}$$

есть не что иное, как среднее число событий на входе в экспериментальную установку (\bar{N} – среднее число зарегистрированных событий).

В реальных вычислениях (максимизации логарифма правдоподобия) используется несколько отличная параметризация, а именно:

$$\bar{\rho}' = \bar{\rho}/N$$

где N – число входных событий, преимуществом данной параметризации является то, что результат максимизации практически не зависит от N при больших N , это позволяет использовать универсальные настройки оптимизатора и задание начального приближения вне зависимости от числа входных событий. В этой параметризации логарифм правдоподобия равен:

$$\ln L_{ext} = \sum_{k=1}^N \ln \left(\sum \bar{\rho}'_{ij}\mathcal{M}_i(\tau_k)\mathcal{M}_j^*(\tau_k) \right) - N \int \sum \bar{\rho}'_{ij}\mathcal{M}_i(\tau)\mathcal{M}_j^*(\tau)A(\tau)d\tau + const \quad (13)$$

В программе происходит минимизация функции (13), взятой со знаком минус.

На практике вычисление второго члена функции логарифма правдоподобия реализуется с помощью генерации равномерно распределённых по трёхчастичному фазовому объёму событий и протягивании их через установку. Далее с помощью этих

событий методом Монте-Карло считаются интегралы

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{aa'} &= \int A(\tau) \mathcal{M}_a(\tau) (\mathcal{M}_{a'}(\tau))^* d\tau \\ &= \frac{1}{N_{\text{input}}} \sum_i^{N_{\text{input}}} A'(\tau_i) \mathcal{M}_a(\tau_i) (\mathcal{M}_{a'}(\tau_i))^*, \end{aligned}$$

где в качестве $A'(\tau_i)$ используется флажок, который ставится равным 1, если событие прошло использованную для реальных данных процедуру фильтрации, и равным 0, если не прошло. Полученные интегралы при подсчёте функции правдоподобия сворачиваются с матрицей плотности для получения второго члена.

В результате оптимизации предложенной функции (13) независимо в каждом бине по m и t' мы получаем параметры матрицы плотности. Предсказанные интенсивности волн с учётом аксептанса, а также интенсивность интерференции между волнами можно найти по формулам

$$\begin{aligned} I_a &= \bar{\rho}'_{aa} N \\ I_{aa'} &= 2 \operatorname{Re} \left(\bar{\rho}'_{aa'} N \left| \int \mathcal{M}_a(\tau) (\mathcal{M}_{a'}(\tau))^* d\tau \right| \right) \end{aligned}$$

Для того, чтобы получить полное число событий с учётом аксептанса для определённого набора волн (в частности для полного набора волн), надо просуммировать интенсивности всех волн из этого набора и всех их попарных интерференций.

3.5 Особенности программного исполнения

Для реализации описанного выше метода ПВА используется разработанный самостоятельно программный комплекс, содержащий некоторое количество особенностей, о которых хотелось бы упомянуть.

Функции из (7) изначально не являются нормированными. Нормировка этих функций осуществляется “на лету” посредством заранее вычисленных интегралов по трёхчастичному фазовому объёму от этих функций. Подобные интегралы вычисляются для каждого бина по m и t' . В итоге в конечном анализе используются функции

$$\mathcal{M}'_a = \frac{\mathcal{M}_a}{\left| \int \mathcal{M}_a(\tau) d\tau \right|}$$

Ввиду наличия тождественных частиц амплитуда должна быть соответствующим образом симметризована:

$$\mathcal{M}_a^{\text{sym}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathcal{M}_a + \hat{P}_{ij} \mathcal{M}_a),$$

где \hat{P}_{ij} - оператор перестановки тождественных частиц i и j . При изначальном рассмотрении, изложенном в предыдущих разделах, возникают две изобары, не отличающиеся ничем, кроме пары, в которой рождаются. Одна изобара рождается в паре $\pi^+ \pi_1^-$, а другая – в паре $\pi^+ \pi_2^-$. При действии оператора перестановки на такую амплитуду элементы матрицы плотности не меняются, а меняются соответствующие функции углов и двухчастичных масс.

Матрица плотности для уменьшения количества параметров минимизации параметризуется как матрица с двумя блоками ранга 1 для каждой из натуральностей.

$$\rho_{aa'} = V_a V_{a'}^*$$

Для устранения неоднозначности минимизации ввиду наличия нефизичной общей фазы V_a для предположительно доминирующей волны устанавливается чисто действительным. При наличии блока волн с отрицательной натуральностью среди них одна из волн тоже делается чисто действительной.

Минимизация осуществляется минимизатором UOBYQS. Алгоритм минимизации можно найти в [7]. Этот алгоритм является модификацией UOBYQA из [8]. Для избежания попадания в локальные минимумы совершается 10 попыток минимизации со случайными начальными параметрами. Из всех точек, в которых минимизатор успешно сошёлся, выбирается точка с наименьшим значением функции.

4 Самосогласованность

Для проверки работоспособности программного комплекса для ПВА предлагается провести численный эксперимент. Выбирается некоторый набор волн (см. таб. 2). Для произвольно выбранных значений параметров генерируется некоторое количество событий, которые в дальнейшем пропускаются через модель установки. Получившиеся в итоге события подаются на вход программы ПВА. Ожидается, что программа ПВА должна восстанавливать исходную параметризацию.

Таблица 2: Набор волн для численного эксперимента

$J^P \Lambda^n$	l	Изобара
$0^- 0^+$	S	σ
$1^+ 0^+$	S	$\rho(770)$
$2^- 0^+$	D	σ
$2^- 1^+$	D	σ
$2^+ 1^+$	D	$\rho(770)$
$1^+ 1^-$	S	$\rho(770)$
$2^+ 1^-$	D	$\rho(770)$

Данный численный эксперимент можно провести несколько раз (в нашем случае 20) для одинакового числа входных событий, а позднее вычислить среднеквадратичное отклонение восстановленных параметров от заложенных изначально. Проведя несколько таких серий численных экспериментов можно увидеть, насколько хорошо программа ПВА восстанавливает исходные параметры в зависимости от числа входных событий. Всё происходит в бине шириной 40 МэВ с центром в 0.7 ГэВ по инвариантной массе при $t' < 0.001$ ГэВ.

На рисунках 5 и 6 приведены среднеквадратичные отклонения для диагональных элементов матрицы плотности при разном количестве входных событий, а также их значения. На рисунке 5 приведён случай модели идеальной установки с единичным

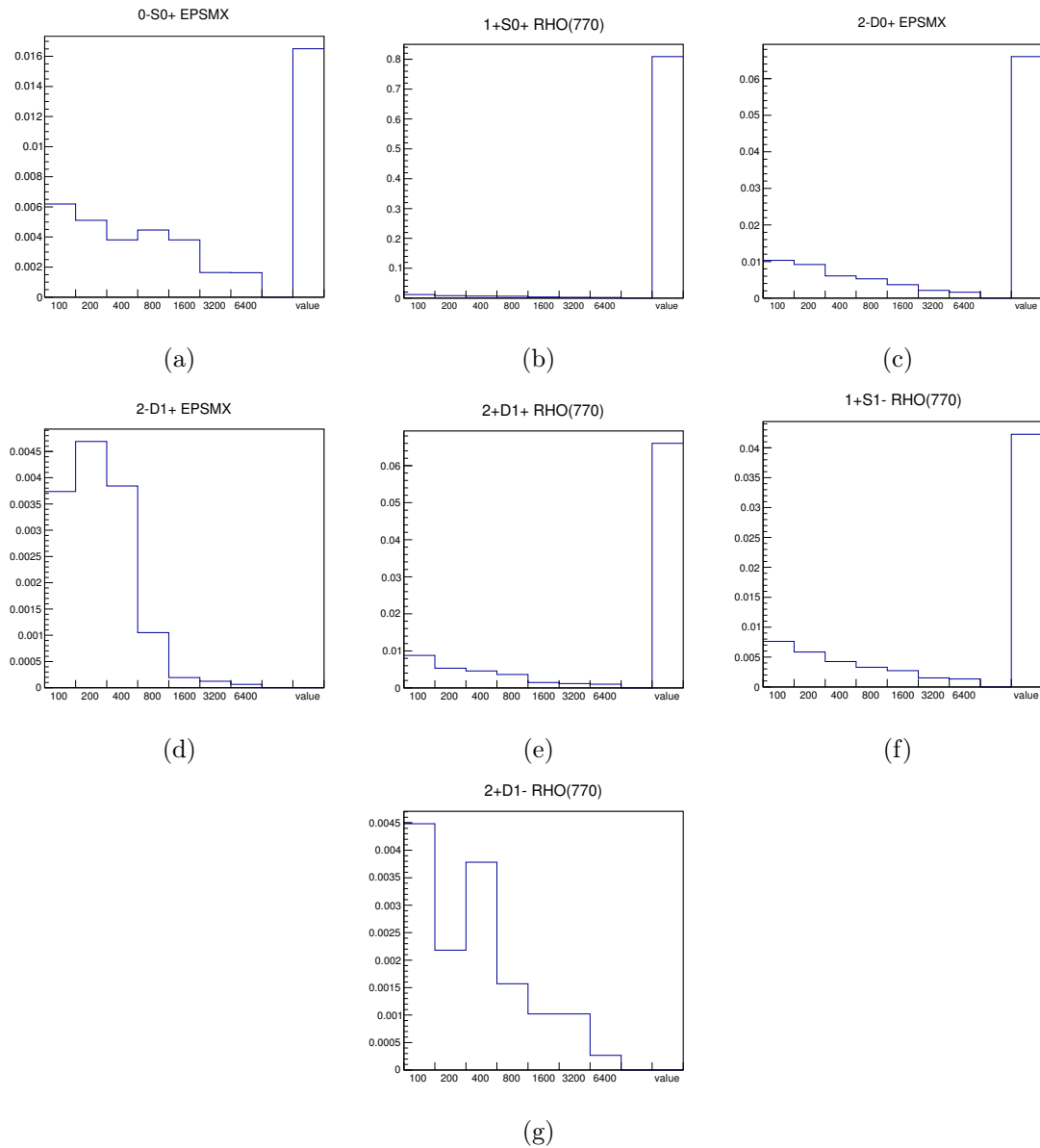


Рис. 5: Среднеквадратичные отклонения от исходных значений диагональных элементов матрицы плотности в зависимости от числа входных событий для численного эксперимента с идеальным аксептансом. По горизонтальной оси отложено число входных событий, а по вертикально – среднеквадратичное отклонение. В столбце “value” указывается исходное значение соответствующей величины.

аксептансом. Видно, что все волны восстанавливаются успешно. Чем больший вклад вносит волна в общую интенсивность, тем меньше относительная ошибка.

На рисунке 6 в качестве модели установки использовалась Geant-модель установки ВЕС, которая и будет использоваться в дальнейшем при вычислении реального аксептанса. Как известно существует естественная проблема всего метода ПВА, которая выражается в отсутствии учёта разрешения установки. То, что метод будет работать даже при наличии такого разрешения, является предположением при про-

ведении ПВА. Однако, как это можно видеть из результатов численного эксперимента, это предположение можно считать допустимым. Однако тут есть важное уточнение. Ввиду малых t' и наличия искажения импульсов установкой угол поворота плоскости реакции (плоскости, построенной на векторах импульса пучка и импульса системы трёх пионов) относительно пучка плохо выделяем. Это приводит к “перетеканию” интенсивности из волн с одной натуральностью в волны с противоположной натуральностью, но с теми же квантовыми числами. В приведённых результатах это можно отчётливо наблюдать для пары волн $2^+D1^+\rho(770)$ и $2^+D1^-\rho(770)$. Как обойти влияние этого эффекта подробнее описано в разделе 6.2.

Заметим, что доминирующие волны для случая с моделью реальной установки выделяются вполне успешно даже для 100 событий, что позволяет применить ПВА для случаев с небольшой статистикой.

Следующим этапом численного эксперимента будет сравнение исходных распределений по переменным трёхчастичного фазового объёма с распределениями, соответствующими результатам ПВА. Данное сравнение можно видеть на рисунках 7.

По приведённым результатам можно сказать, что программный комплекс внутренне согласован и работоспособен, что даёт нам право применить его к анализу реальных данных.

5 Анализ $\pi^- \text{Be} \rightarrow \pi^- \pi^- \pi^+ \text{Be}$

Для дальнейшей проверки работоспособности программного комплекса было предложено применить его к анализу реакции $\pi^- \text{Be} \rightarrow \pi^- \pi^- \pi^+ \text{Be}$. Эта реакция уже продолжительное время исследуется в том числе и на установке ВЕС, и достаточно хорошо изучена. В данной работе будет изучаться диапазон инвариантных масс системы $\pi^+ \pi^- \pi^-$ от 0.6 до 2.6 ГэВ с бинами шириной 20 МэВ. По t' выбран бин от 0 до 0.03 ГэВ². В приложении 8.1 можно найти набор волн, который использован в анализе.

5.1 Сеанс №44

Данные из этого сеанса уже обработаны независимо другими участниками эксперименте ВЕС, что позволяет сравнить результаты. Общее число событий, которые в итоге подвергаются ПВА составляет 10^6 . Для вычисления интегралов акцептанса используются равномерно распределённые по фазовому объёму события, пропущенные через модель установки, в количестве $4 \cdot 10^5$ на бин.

Сравнение проводится с результатами независимого анализа [22] на тех же данных. Важно отметить, что этот анализ использует матрицу плотности произвольного ранга, поэтому сравнение идёт только с вектором состояний, соответствующим наибольшему собственному значению (отдельно в каждом блоке по натуральности). На рисунках в приложении 8.2 приведены интенсивности волн. Чёрным обозначены результаты нашего анализа, а красным – результаты анализа И. Качаева, взятые из [23].

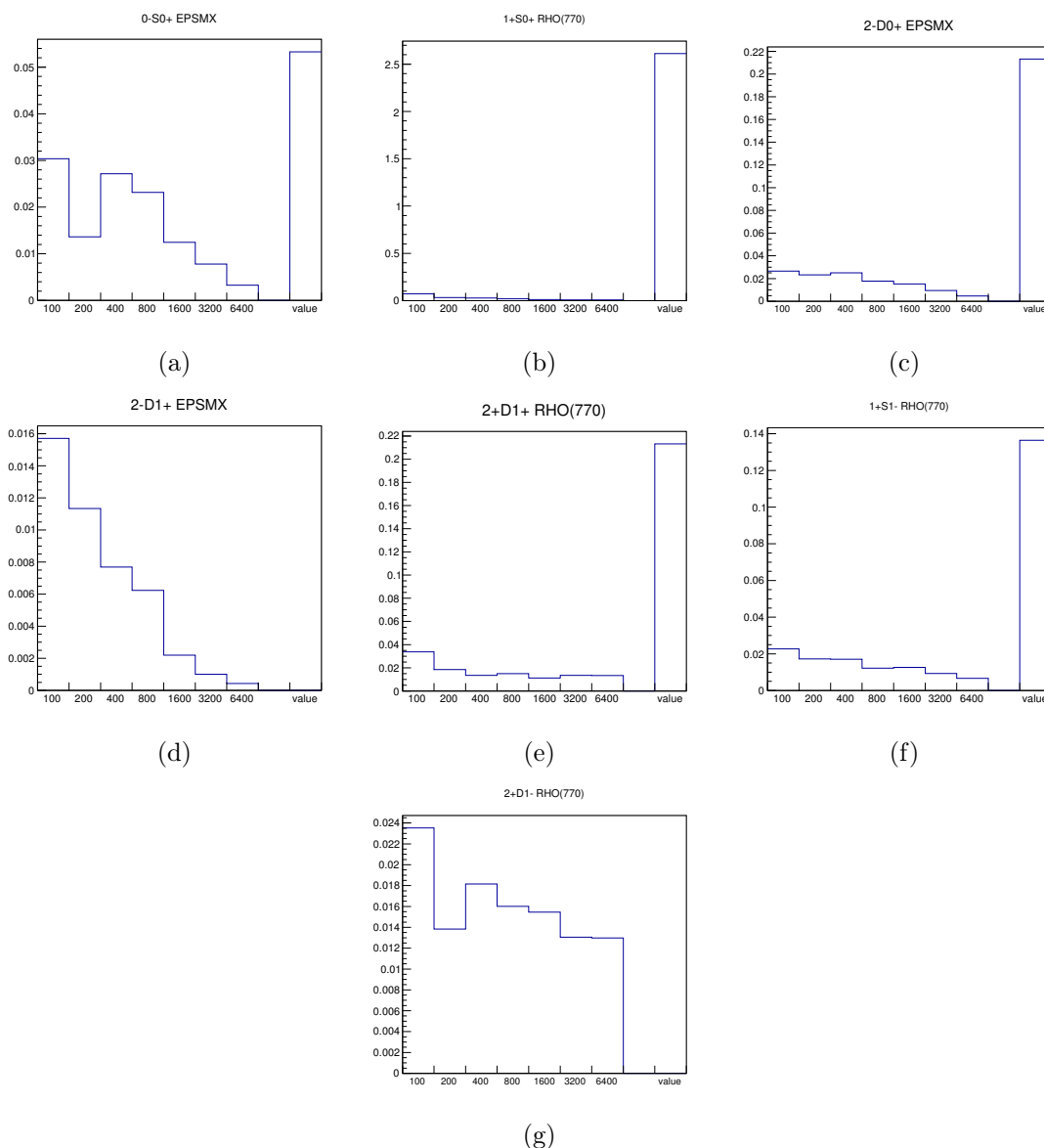


Рис. 6: Среднеквадратичные отклонения от исходных значений диагональных элементов матрицы плотности в зависимости от числа входных событий для численного эксперимента с использованием Geant-модели установки ВЕС. По горизонтальной оси отложено число входных событий, а по вертикально – среднеквадратичное отклонение. В столбце “value” указывается исходное значение соответствующей величины.

5.2 Сеанс №50

Часть сеанса №50 была проведена на бериллиевой мишени, что позволяет провести анализ, аналогичный предыдущему, и сравнить результаты с результатами сеанса №44. Это делается в связи с изменением установки в период между 44м и 50м сеансами. А именно: были добавлены свинцовые конвертеры и переделана охранный система, что изменило и аксептанс установки. Результаты показывают, что результаты ПВА при этом остались стабильны за исключением пика в 3+. Ввиду разной

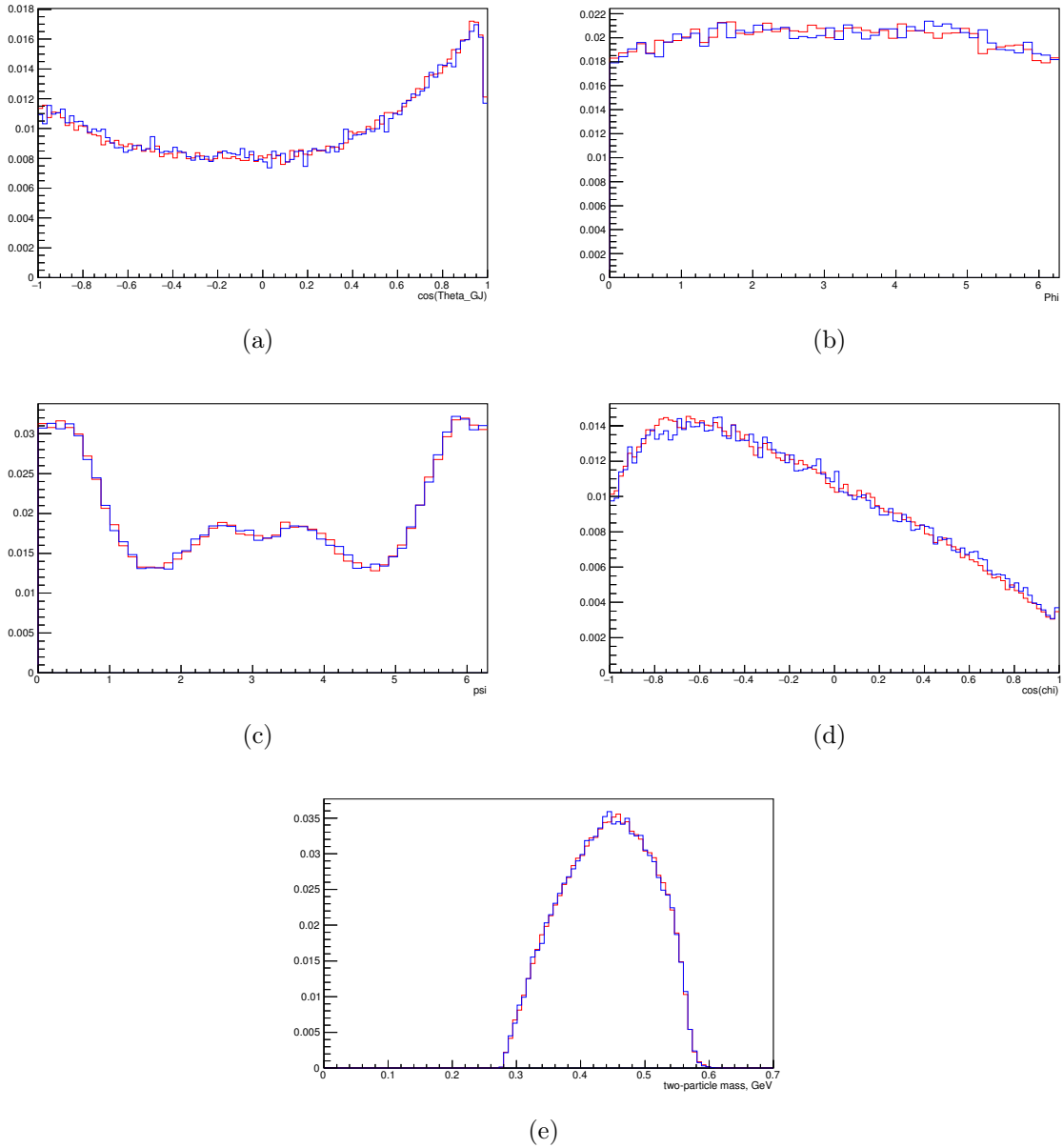


Рис. 7: Распределения по угловым переменным и двухчастичной массе для исходных данных (красный) и данных, сгенерированных согласно результатам минимизации (синий). Рассматриваются двухзаходные распределения для пар $\pi^+\pi^-$. (a) угол Θ , (b) угол Ψ , (c) угол ψ , (d) угол χ , (e) масса пары $\pi^+\pi^-$. Используются обозначения из раздела 3.2

статистики нормировку интенсивностей проведём по пику $a_2(1320)$ в волне $2+D1+\rho(770)$. Полный набор картинок с интенсивностями волн можно найти в приложении 8.3. Черным обозначены результаты анализа данных сеанса №50, а красным – результаты анализа данных сеанса №44.

6 Анализ $\pi^- \text{Pb} \rightarrow \pi^- \pi^- \pi^+ \text{Pb}$

6.1 Весь диапазон масс

Для начала проведём анализ для диапазона по массе и t' , использованного в предыдущих анализах. Результаты сравним с анализом на бериллии сеанса №50. Нормировка проводится по пику $\pi_2(1670)$ в волне 2-S0+ $f_2(1270)$. Полный набор картинок можно найти в приложении 8.4. Черным обозначены результаты анализа данных со свинцовой мишенью, а красным – результаты анализа данных с бериллиевой мишенью. Можно заметить явный двукратный рост относительной интенсивности в некоторых волнах или отдельных пиках по сравнению с бериллиевой мишенью. Других отличительных особенностей нет, в целом волны похожи друг на друга с указанными оговорками.

6.2 Малые t' и малые массы

Конечной целью нашей работы является наблюдение примаковского рождения в исследуемой реакции. Для этого мы рассмотрим диапазон $t' < 0.001$ ГэВ². Мотивацией к выбору такого бина по t' служит t' -распределение для распада каонов $K^- \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^-$. Эффекты разрешения установки и многократного рассеяния в мишени приводят к тому, что формой этого распределения является экспонента. На рисунке видно, что в худшем случае (все три трека проходят через мишень) наклон экспоненты $\approx 2400 \pm 100$, что и обуславливает такой выбор бина по t' .

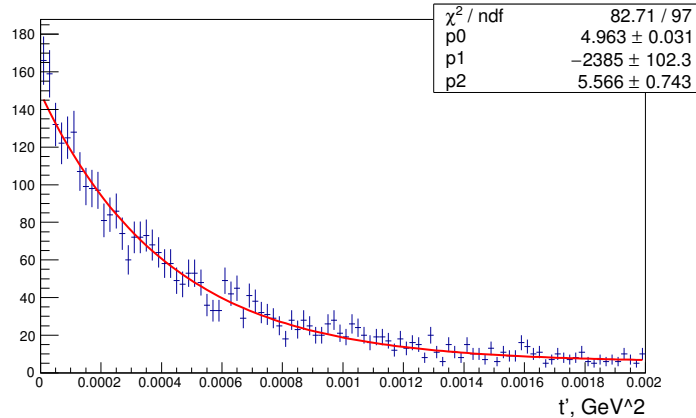


Рис. 8: Распределение по t' для событий с массой $m = m_K \pm 20$ МэВ, положением вершины по оси z в 10-50 см от центра мишени вверх по пучку и условием идентификации пучковой частицы как каона. Фит произведен экспонентой с константной подложкой.

В выбранном нами диапазоне дифракционная реакция с проекцией углового момента $\Lambda = 1$ подавлена, поэтому мы предполагаем, что основной вклад в компоненту с $\Lambda = 1$ вносит обмен квазиреальным фотоном, у которого как раз подавлена нефизическая поляризация, соответствующая $\Lambda = 0$. Однако при таких малых t' угол между пучком и суммарным импульсом вылетающих пионов мал, поэтому точность

определения угла поворота плоскости реакции вокруг пучка падает из-за разрешения установки и многократного рассеяния в мишени. Это приводит к невозможности различить состояния с разной натуральностью. Поэтому в набор волн, применяющийся к данному анализу вводятся ещё и состояния с отрицательной натуральностью. Итоговый набор волн можно видеть в таблице 3. Мотивацией к ограничению набора только спинами до 2 является в том числе и теоретически предсказанное из киральной пертурбативной теории распределение по углу Θ для примаковских событий в этой реакции (см. рисунок 12.b). Предложенный способ выделения примаковской составляющей взят из [14].

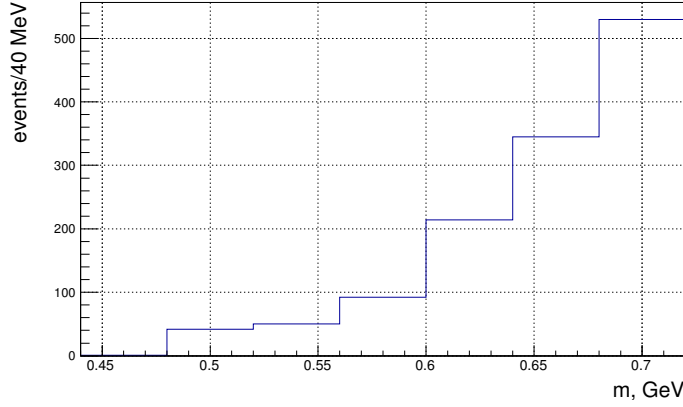


Рис. 9: Распределение по массе событий, которые пойдут в анализ в бинах с $t' < 0.001 \text{ ГэВ}^2$

Для того, чтобы выделить дифракционную и примаковскую компоненты целиком, производится полное суммирование по соответствующим блокам найденной матрицы плотности. Для выделения дифракционной компоненты суммируются все интенсивности волн с $\Lambda = 0$ и их интерференционные члены. Аналогично для примаковской компоненты происходит суммирование по блоку с $\Lambda = 1$. Анализ проводился для массы $M_{3\pi} < 0.72 \text{ ГэВ}$ в бинах шириной 40 МэВ и для $t' < 0.01 \text{ ГэВ}^2$ в бинах шириной 0.001 ГэВ^2 . Исходное распределение по массе для бинов $t' < 0.001 \text{ ГэВ}^2$ можно видеть на рисунке 9. Результаты можно видеть на рисунках 10 и 11.

6.2.1 Киральная амплитуда

Приведённые результаты ввиду малого числа событий имеют большие ошибки. С целью уменьшить эти ошибки было предложено воспользоваться идеей из [14] и сократить число параметров минимизации посредством введения “киральной амплитуды”.

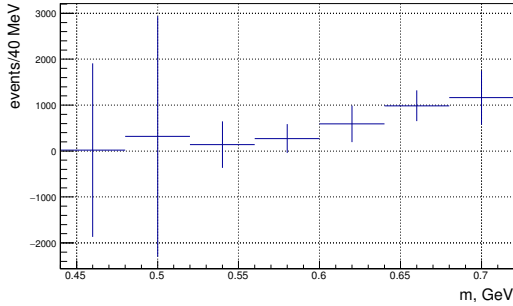
Из работ [12] и [13] известна амплитуда перехода для примаковской реакции.

$$\mathcal{A} = \frac{2e}{m_\pi^2} (\vec{\epsilon} \cdot \vec{q}_1 A_1 + \vec{\epsilon} \cdot \vec{q}_2 A_2)$$

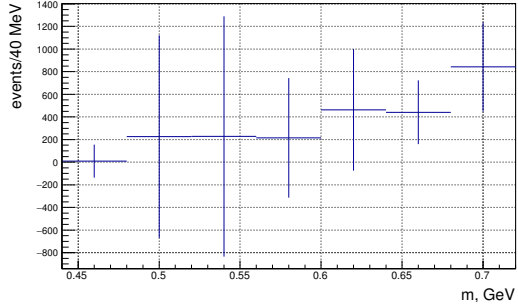
, где q_1 и q_2 – трёхмерные импульсы исходящих π^- в системе Готфрида-Джексона. $\vec{\epsilon}$ – поляризация фотона. Для получения сечения из этой амплитуды перехода она

Таблица 3: Набор волн для диапазона малых масс и малых t'

$J^P \Lambda^n$	l	Изобара
0^-0^+	S	σ
0^-0^+	P	$\rho(770)$
1^+0^+	S	$\rho(770)$
1^+0^+	S	σ
2^-0^+	D	σ
1^+1^+	S	$\rho(770)$
1^+1^+	P	σ
1^-1^+	P	$\rho(770)$
2^-1^+	P	$\rho(770)$
2^-1^+	D	σ
2^+1^+	D	ρ
1^+1^-	S	$\rho(770)$
1^+1^-	P	σ
1^-1^-	P	$\rho(770)$
2^-1^-	P	$\rho(770)$
2^-1^-	D	σ
2^+1^-	D	ρ



(a)



(b)

Рис. 10: Восстановленная интенсивность волн для $t' < 0.001 \text{ ГэВ}^2$

(a) при $\Lambda = 0$ (b) при $\Lambda = 1$

возводится в квадрат и усредняется по поляризации фотона, что приводит нас к

$$\sigma \propto \left[(A_1 \vec{q}_1 + A_2 \vec{q}_2) \times \vec{k} \right]^2 \quad (14)$$

, где \vec{k} – единичный вектор в направлении импульса фотона. Величины A_1 и A_2 берутся из [13] и выражены через мандельштамовские инварианты $s = (p_1 + k)^2$, $s_1 = (q_1 + q_3)^2$, $s_2 = (q_2 + q_3)^2$, $t_1 = (k - q_1)^2$, $t_2 = (k - q_2)^2$, где q_3 – импульс π^+ . Эти

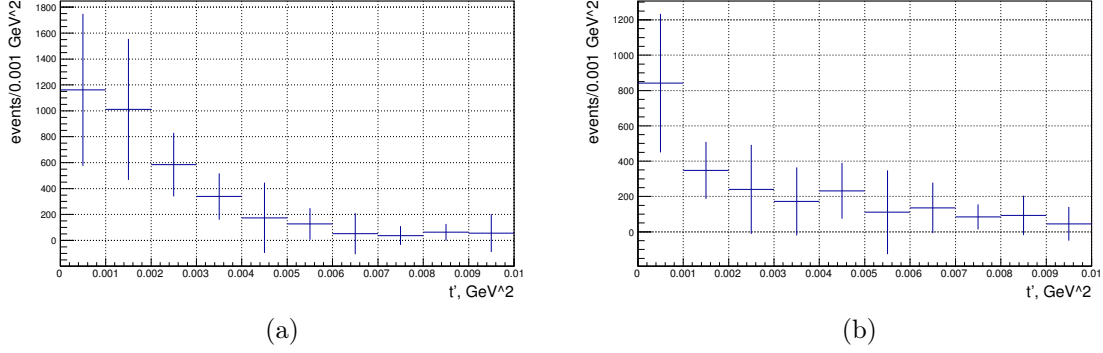


Рис. 11: Восстановленная интенсивность волн для $m = (0.7 \pm 0.02)$ ГэВ
(a) при $\Lambda = 0$ (b) при $\Lambda = 1$

величины взяты для древесного приближения.

$$A_1 = \frac{s + m_\pi^2 - s_1 - s_2}{3m_\pi^2 - s - t_1 - t_2} + \frac{s - s_1 - s_2 + t_2}{t_1 - m_\pi^2} - 1$$

$$A_2 = \frac{s + m_\pi^2 - s_1 - s_2}{3m_\pi^2 - s - t_1 - t_2} + \frac{s - s_1 - s_2 + t_1}{t_2 - m_\pi^2} - 1$$

Видно, что получившееся сечение выходит бозе-симметричным. Согласно этому сечению можно составить амплитуду, которую в дальнейшем использовать как одну из волн ПВА.

$$\mathcal{M} = \left| (A_1 \vec{q}_1 + A_2 \vec{q}_2) \times \vec{k} \right| \quad (15)$$

Однако в этой форме у этой волны отсутствует зависимость от Φ . Проведём некоторые выкладки, проясняющие легальность использования её наравне с другими волнами.

Переменные τ , описывающие событие, можно представить следующим образом:

$$\tau = (\xi, \Phi, \phi, \nu)$$

где ξ – переменные, от которых зависит квадрат амплитуды физического процесса (за исключением Φ), Φ – азимутальный угол поворота системы 3π в системе Готтфрида-Джексона, ϕ – азимутальный угол поворота события в лабораторной системе относительно пучка, ν – вершина события. В общем случае, если задана интенсивность (квадрат амплитуды) событий на входе в экспериментальную установку $I_{prod}(\xi, \Phi)$, то наблюдаемая интенсивность есть:

$$I_{observed} = I_{prod}(\xi, \Phi) A(\xi, \Phi, \phi, \nu)$$

В принципе, при использовании метода максимума правдоподобия, можно проинтегрировать это выражение по Φ и ϕ , тогда получится совместная плотность распределения по остальным переменным, которую и можно использовать в методе максимума правдоподобия, тогда тот факт, что Φ плохо определяется при $t' \rightarrow 0$

не имеет значения, поскольку Φ теперь не используется. При почти нулевых t' это интегрирование можно выполнить явно. Для этого заметим, что при $t' = 0$ направление суммарного импульса 3π в лабораторной системе совпадает с направлением импульса пучка, из этого непосредственно следует, что аксептанс реально зависит только от суммы углов $\phi + \Phi$, поэтому

$$A(\xi, \Phi, \phi, \nu) = f(\xi, \phi + \Phi, \nu)$$

$$\int \left(\int I_{prod}(\xi, \Phi) A(\xi, \Phi, \phi, \nu) d\phi \right) d\Phi = \int I_{prod}(\xi, \Phi) \left(\int f(\xi, \Phi + \phi, \nu) d\phi \right) d\Phi$$

Сдвигом переменной $\psi = \Phi + \phi$ внутренний интеграл приводится к виду из которого явно видно, что он не зависит от Φ , можно его обратно выразить через A :

$$\int f(\xi, \psi, \nu) d\psi = \int A(\xi, 0, \phi, \nu) d\phi$$

Так что получается, что:

$$\int I_{observed}(\tau) d\phi d\Phi = \left(\int I_{prod}(\xi, \Phi) d\Phi \right) \left(\int A(\xi, 0, \phi, \nu) d\phi \right)$$

Адронная амплитуда \mathcal{M}_{had} с $\Lambda = 0$ от Φ не зависит, киральная амплитуда имеет вид $\mathcal{M}_{chpt} \cos \Phi$ и $\mathcal{M}_{chpt} \sin \Phi$ для положительной и отрицательной натуральностей, где \mathcal{M}_{chpt} не зависит от Φ , поэтому имеем (с точностью до константного множителя):

$$\int |\mathcal{M}_{had} + a\mathcal{M}_{chpt} \cos \Phi + b\mathcal{M}_{chpt} \sin \Phi|^2 d\Phi = |\mathcal{M}_{had}|^2 + \frac{a^2 + b^2}{2} |\mathcal{M}_{chpt}|^2$$

$|\mathcal{M}_{chpt}|^2$ с точностью до константного множителя есть усреднённое по поляризациям фотона дифференциальное сечение $\pi^- \gamma \rightarrow 3\pi$. Поэтому далее используется следующая параметризация для интенсивности для фита с киральной амплитудой:

$$I_{prod}(\xi) = \sum \bar{\rho}_{ij} \mathcal{M}_i(\xi) \mathcal{M}_j^*(\xi) + A_{chpt}^2 |\mathcal{M}_{chpt}(\xi)|^2 + A_{FLAT}^2$$

где ρ , A_{chpt} , A_{FLAT} параметры фита, A_{chpt} , A_{FLAT} – вещественные.

Киральная амплитуда имеет весьма нетривиальную зависимость от переменных фазового объёма (см. рис. 12) и тем самым может быть отделена от “обычных” волн посредством ПВА. Этой амплитудой заменяется весь сектор с проекцией $\Lambda = 1$, что значительно сокращает количество параметров минимизации.

6.2.2 Тест согласованности

Проведён численный эксперимент, аналогичный тому, что проводился в разделе 4. В качестве набора волн будет использован набор из таблицы 3 с киральной амплитудой вместо проекционных волн $\Lambda = 1$.

Как можно видеть из результатов, приведённых на рисунке 13, киральная амплитуда прекрасно восстанавливается даже на маленькой статистике.

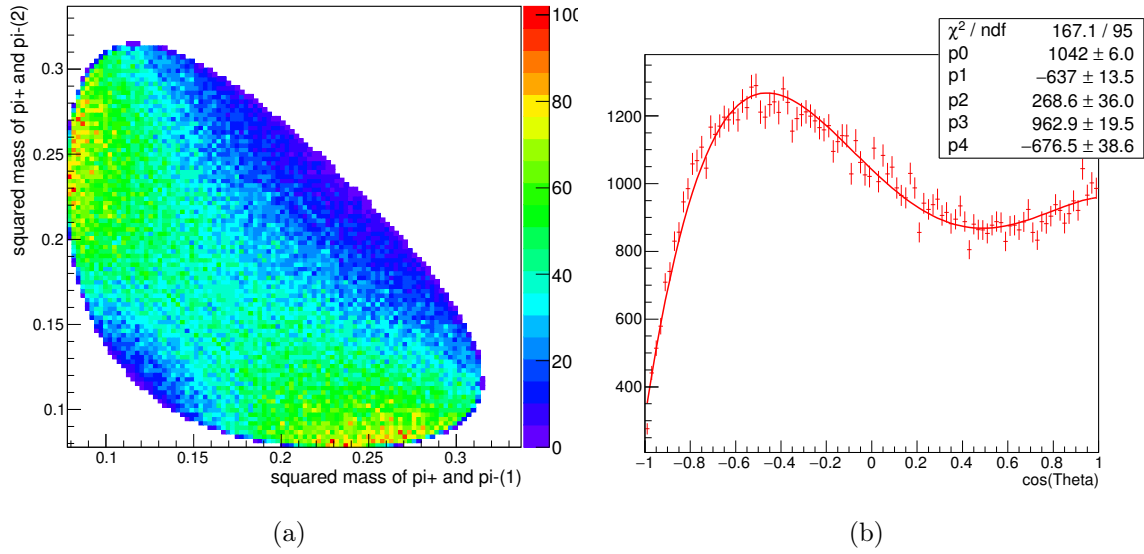


Рис. 12: Распределения (а) по диаграмме Далитца (б) по углу Θ для “киральной” амплитуды при трёхчастичной массе $m = 0.7$ ГэВ. Распределение по углу Θ фитировано полиномом четвёртой степени

6.2.3 Результаты

Проведён ПВА для массы $M_{3\pi} < 0.72$ ГэВ в бинах шириной 40 МэВ и для $t' < 0.01$ ГэВ² в бинах шириной 0.001 ГэВ². В качестве набора волн выбран набор из таблицы 3 с киральной амплитудой вместо проекционных волн $\Lambda = 1$. Результаты можно видеть на рисунках 14 и 15. Наклон экспоненты для компоненты $\Lambda = 0$ в пределах ошибки совпадает с ожидаемым наклоном 400 ГэВ^{-2} . Наблюдаются 190 ± 70 примаковских событий в бине $m = 0.7 \pm 0.02$ ГэВ $t' < 0.001$ ГэВ².

Небольшой комментарий касательно полученных ошибок. При малой статистике величина ошибки, извлекаемая для некоторых волн становится сравнимой с величиной самой волны, что приводит к математической некорректности операции переноса ошибок из амплитуд в квадратично зависящие от них элементы матрицы плотности, использующую факт малости ошибки по сравнению с самой величиной. Это приводит к возможному завышению величины ошибки. Это можно было бы проделать, проведя численный эксперимент и измерив статистическую ошибку напрямую. Однако это не было проделано.

7 Заключение

Создан программный комплекс для проведения ПВА. Проверена его работоспособность как на численном эксперименте, так и на реальных данных в сравнении с независимыми результатами. Проведён ПВА в области малых масс и малых t' , как с обычным набором волн, так и с включением в анализ киральной амплитуды. Использовались данные сеанса №50, полученные за 9 суток набора данных. Результатом анализа является факт наблюдения 190 ± 70 примаковских событий в бине

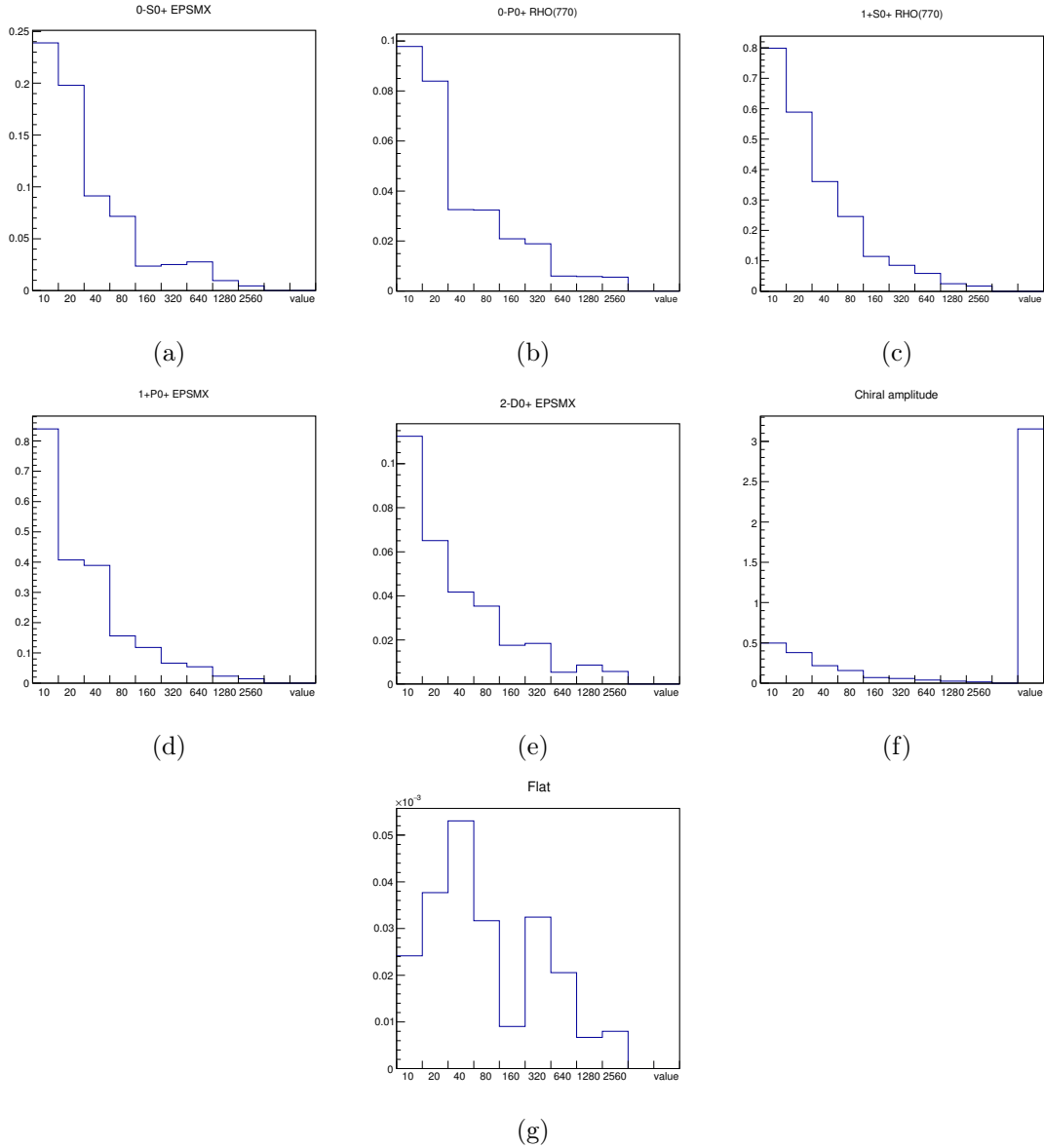


Рис. 13: Среднеквадратичные отклонения от исходных значений диагональных элементов матрицы плотности в зависимости от числа входных событий для численного эксперимента с использованием Geant-модели установки ВЕС. По горизонтальной оси отложено число входных событий, а по вертикальной – среднеквадратичное отклонение. В столбце “value” указывается исходное значение соответствующей величины.

$m = 0.7 \pm 0.02$ ГэВ $t' < 0.001$ ГэВ². В аналогичном бине COMPASS [14] имеет $\approx 1500 \pm 150$ событий. Для достижения такого количества событий требуется увеличить статистику в 7.5 раз, а для достижения такой же относительной ошибки требуется увеличения статистики в 10 раз. Сейчас относительная ошибка 0.37. При увеличении статистики в 10 раз она станет $0.37/\sqrt{10} = 0.12$. Увеличивать статистику предлагается посредством увеличения толщины мишени в 3 раза до 3.3 мм (0.6 рад. длин), чтобы сравняться в этом показателе с COMPASS. Также предлагается про-

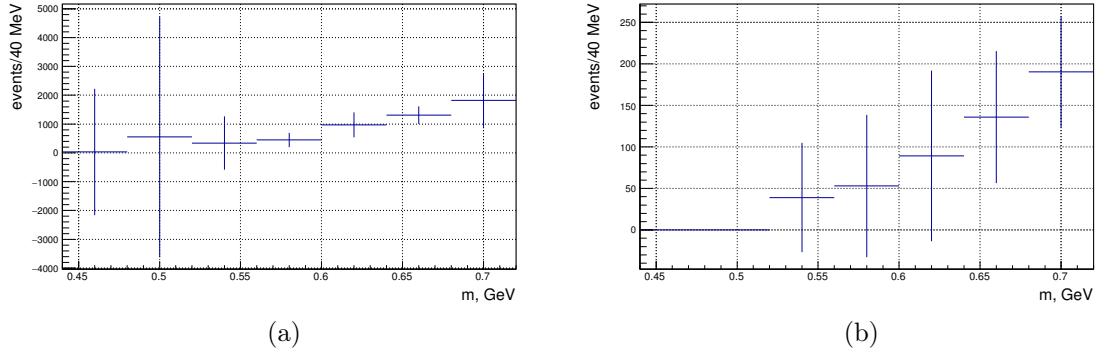


Рис. 14: Восстановленная интенсивность волн для $t' < 0.001 \text{ ГэВ}^2$
 (a) при $\Lambda = 0$ (b) “королевская” амплитуда

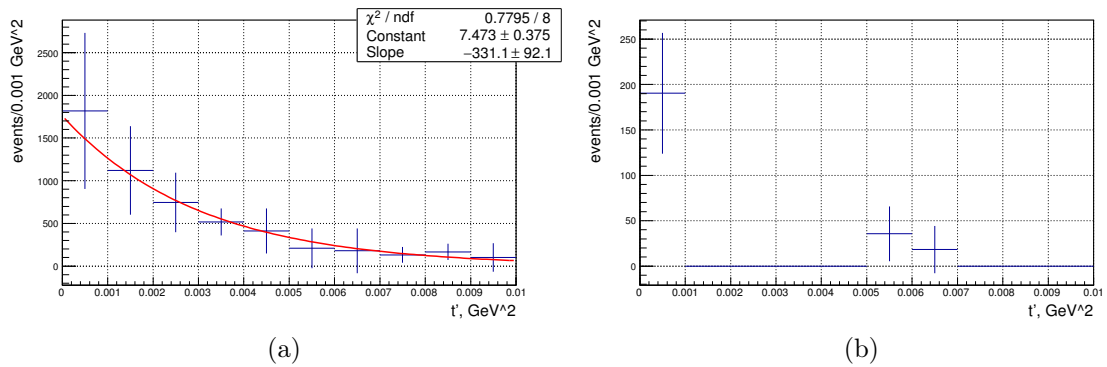


Рис. 15: Восстановленная интенсивность волн для $m = (0.7 \pm 0.02) \text{ ГэВ}$
 (a) при $\Lambda = 0$ (фитирована экспонентой) (b) “королевская” амплитуда

вести ещё сеансы со свинцовой мишенью общим временем 30 суток набора данных. Уже весной 2018 года планируется полноценный ускорительный сеанс с ожидаемым временем набора данных ~ 20 суток. Преимуществом нашего эксперимента в сравнении с COMPASS является возможность изучения также аналогичной реакции с $\pi^- \pi^0 \pi^0$ в конечном состоянии. Мы имеем в разы больший акцептанс для фотонов из-за малого количества вещества в детекторе. Однако энергия пучка у нас 29 ГэВ, а у COMPASS 190 ГэВ, что вызывает трехкратный проигрыш по потоку эквивалентных фотонов при массе $m = 0.7 \text{ ГэВ}$.

Разработанный программный комплекс с незначительными изменениями может быть применён к анализу $\pi^- \pi^0 \pi^0$.

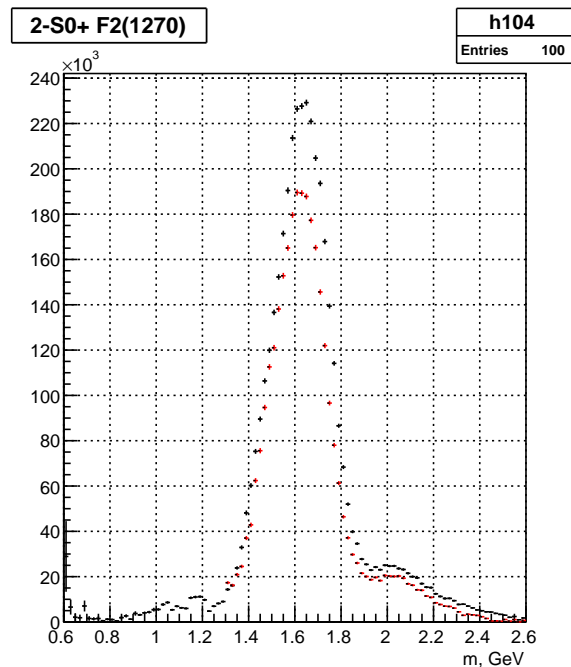
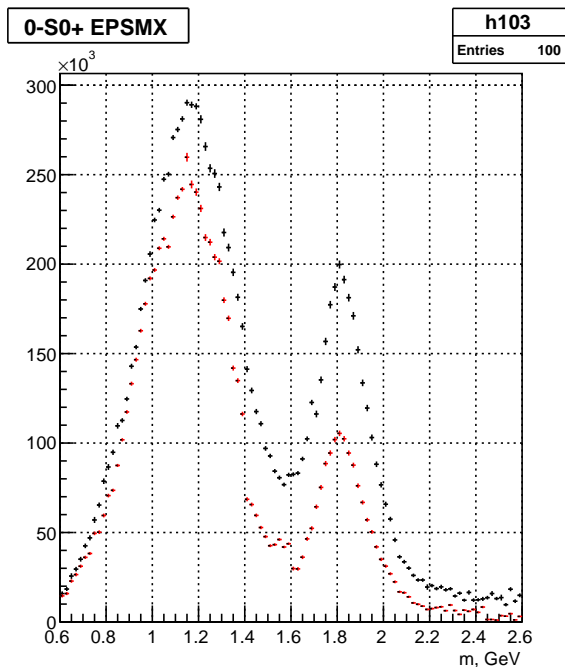
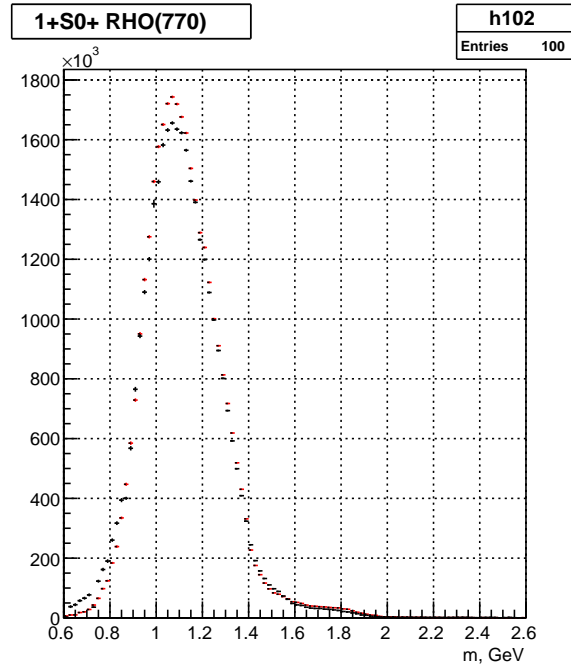
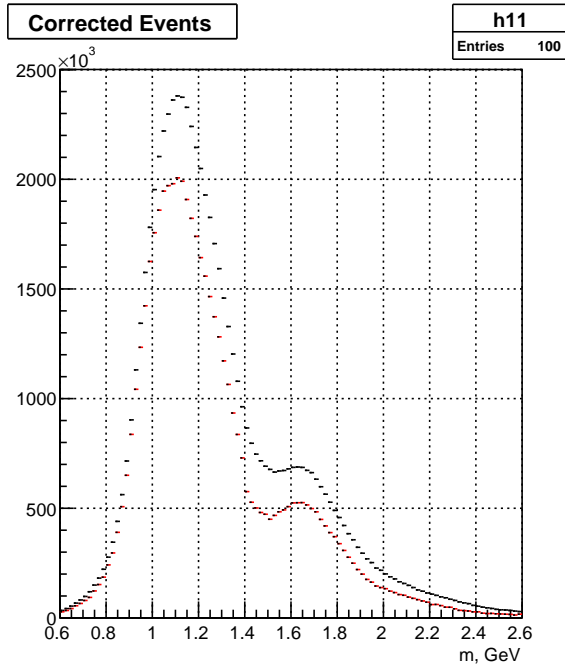
8 Приложения

8.1 Набор волн для анализа

$J^P \Lambda^{\eta}$	l	Изобара	Порог включения, ГэВ
0^-0^+	S	σ	—
0^-0^+	S	$f_0(980)$	1.2
0^-0^+	S	$f_0(1500)$	1.7
0^-0^+	P	$\rho(770)$	—
1^+0^+	S	$\rho(770)$	—
1^+0^+	P	σ	—
1^+0^+	D	$\rho(770)$	—
1^+0^+	P	$f_0(980)$	1.18
1^+0^+	P	$f_2(1270)$	1.22
1^+1^+	S	$\rho(770)$	—
1^+1^+	P	σ	1.1
1^-1^+	P	$\rho(770)$	—
2^-0^+	S	$f_2(1270)$	—
2^-0^+	P	$\rho(770)$	—
2^-0^+	D	σ	—
2^-0^+	F	$\rho(770)$	—
2^-0^+	D	$f_0(980)$	1.16
2^-0^+	D	$f_2(1270)$	—
2^-1^+	S	$f_2(1270)$	1.1
2^-1^+	P	$\rho(770)$	—
2^-1^+	D	σ	—
2^-1^+	F	$\rho(770)$	—
2^-1^+	D	$f_2(1270)$	—
2^+1^+	D	$\rho(770)$	—
2^+1^+	P	$f_2(1270)$	1.0
3^+0^+	S	$\rho_3(1690)$	1.38
3^+0^+	D	$\rho(770)$	—
3^+0^+	P	$f_2(1270)$	0.96
4^-0^+	F	$\rho(770)$	—
4^+1^+	F	$f_2(1270)$	—
4^+1^+	G	$\rho(770)$	—

8.2 Результаты анализа сеанса №44

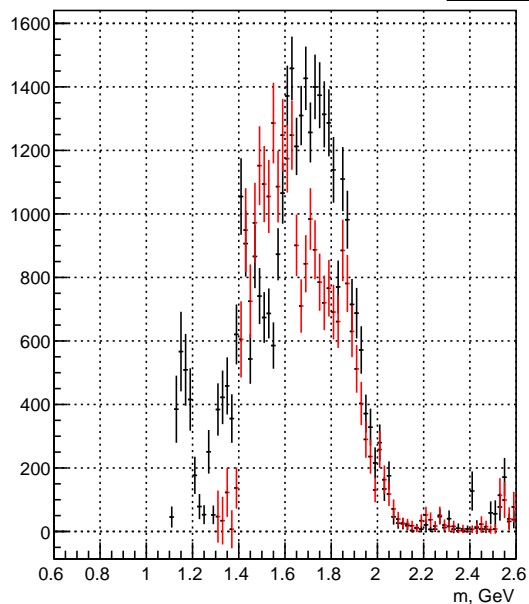
Black: our results. Red: I.Kachaev results.



Black: our results. Red: I.Kachaev results.

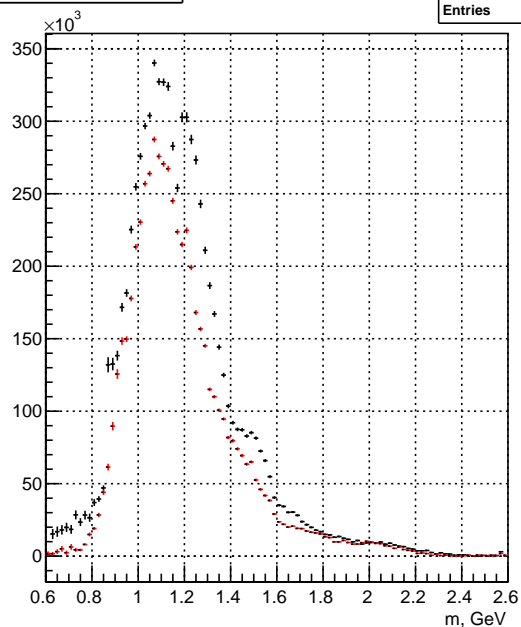
2-S1+ F2(1270)

h105
Entries 100



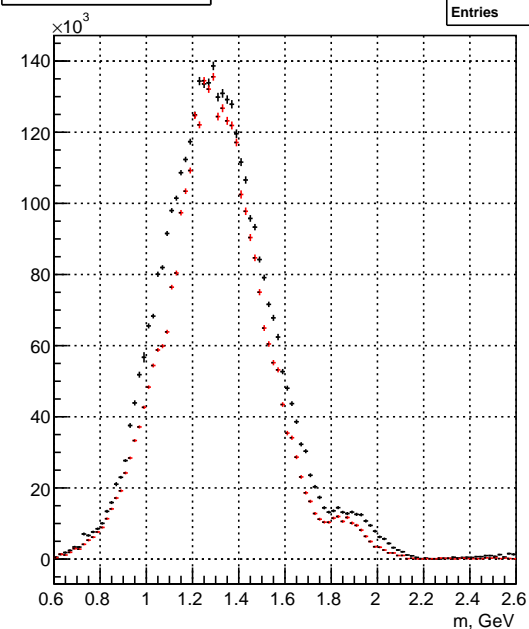
1+P0+ EPSMX

h106
Entries 100



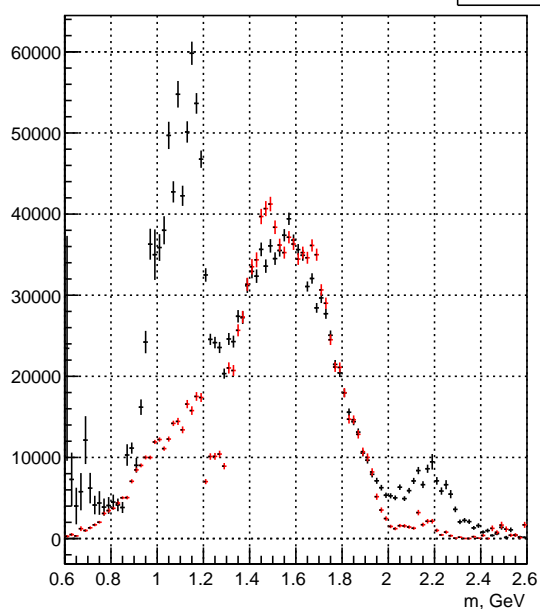
0-P0+ RHO(770)

h107
Entries 100

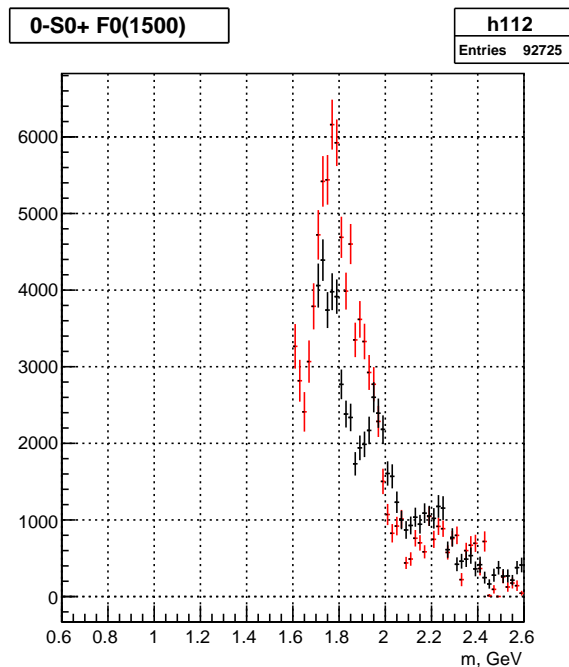
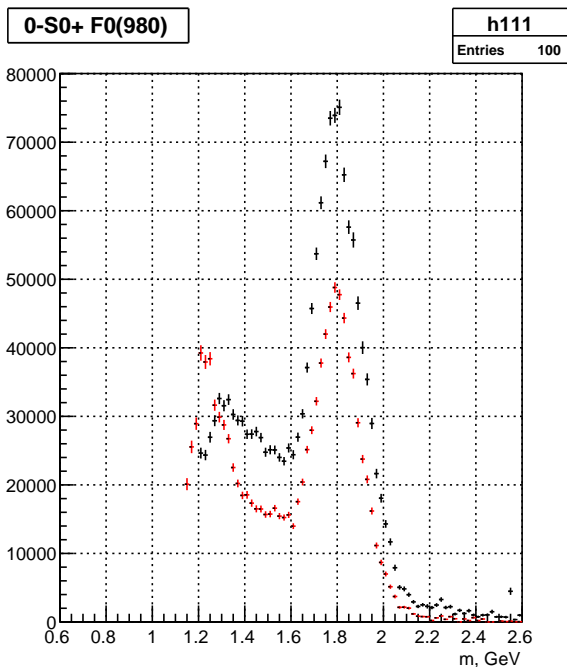
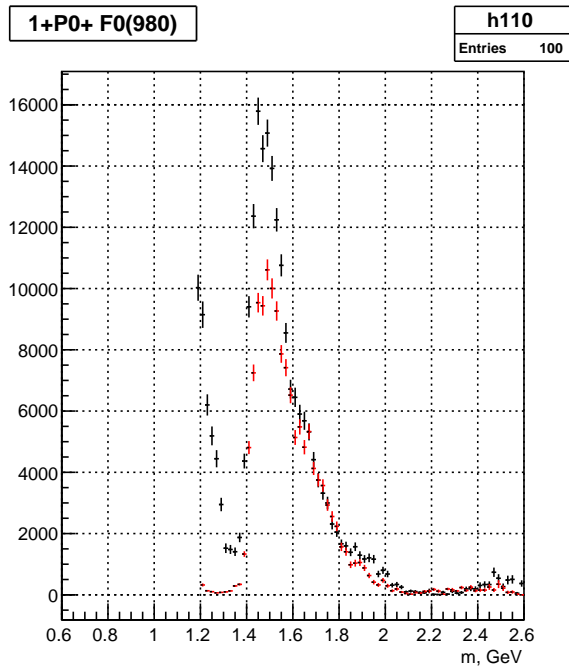
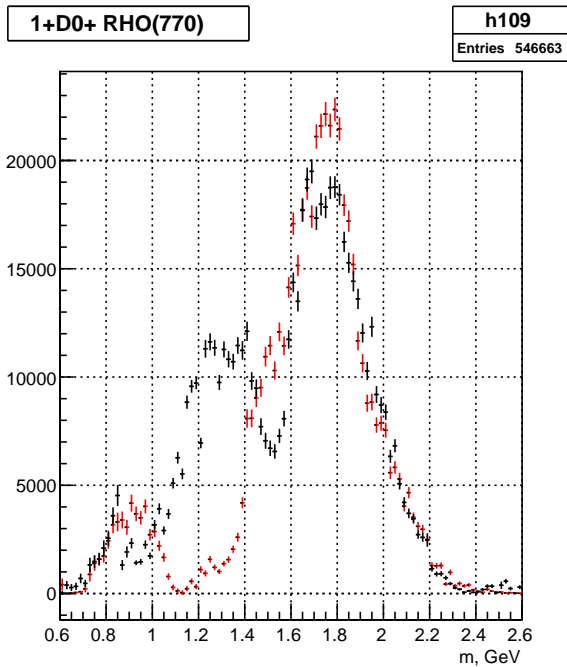


2-P0+ RHO(770)

h108
Entries 100



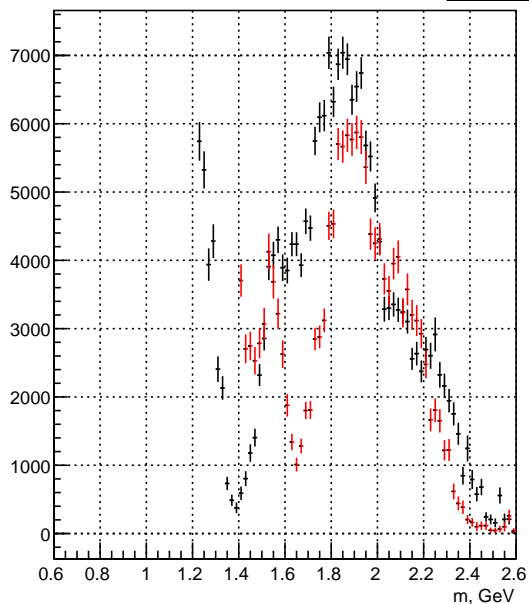
Black: our results. Red: I.Kachaev results.



Black: our results. Red: I.Kachaev results.

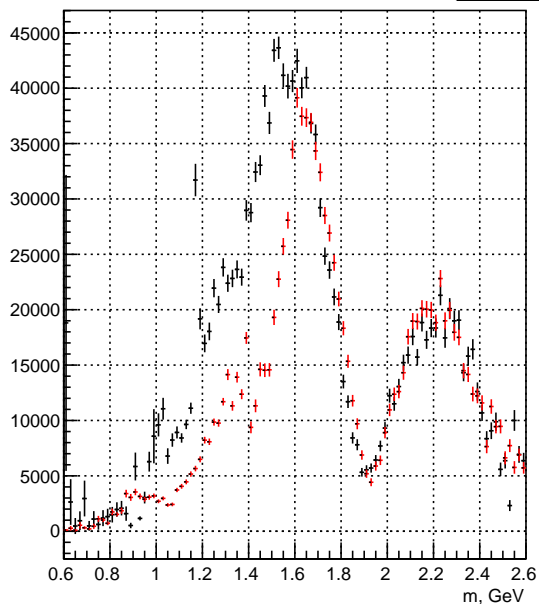
1+P0+ F2(1270)

h113
Entries 100



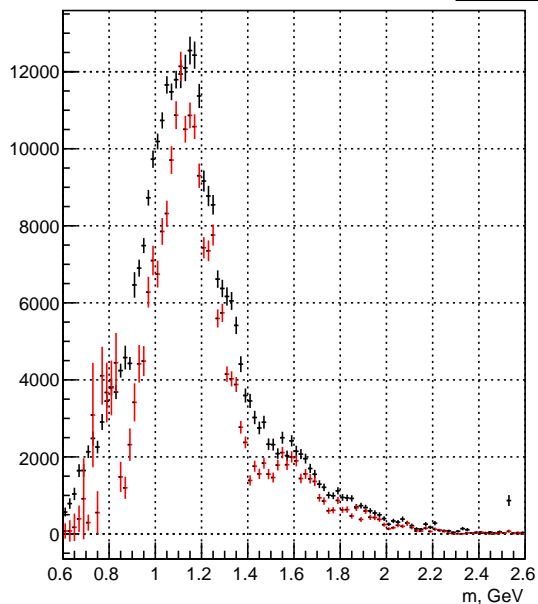
2-D0+ EPSMX

h114
Entries 100



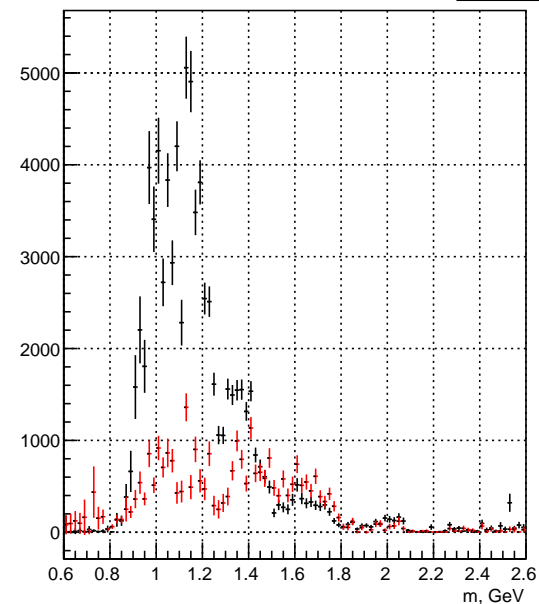
1+S1+ RHO(770)

h115
Entries 100



1-P1+ RHO(770)

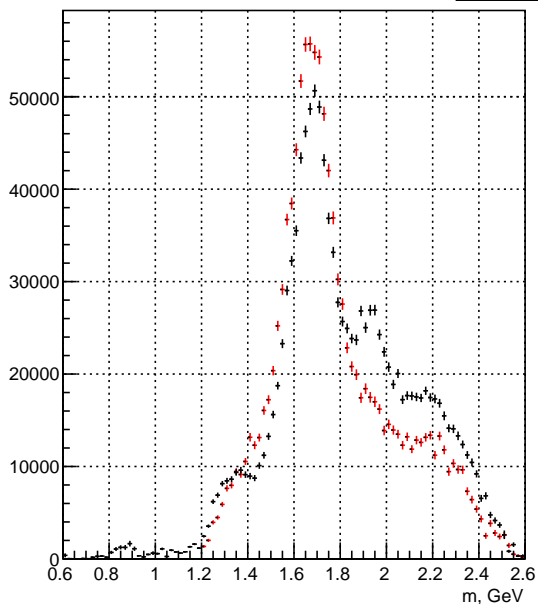
h116
Entries 100



Black: our results. Red: I.Kachaev results.

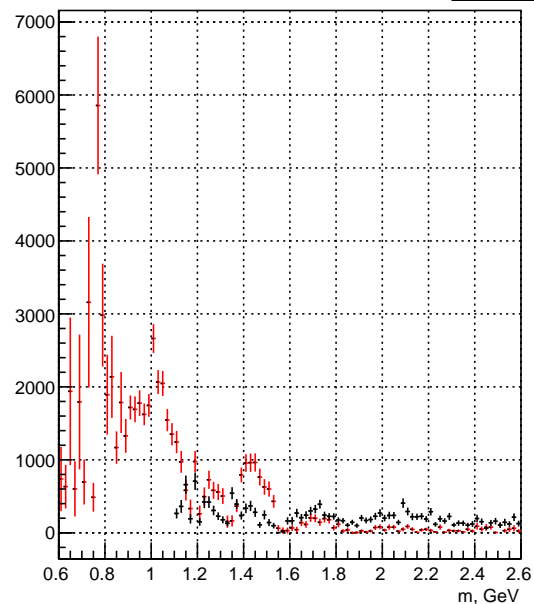
2-F0+ RHO(770)

h117
Entries 1196373



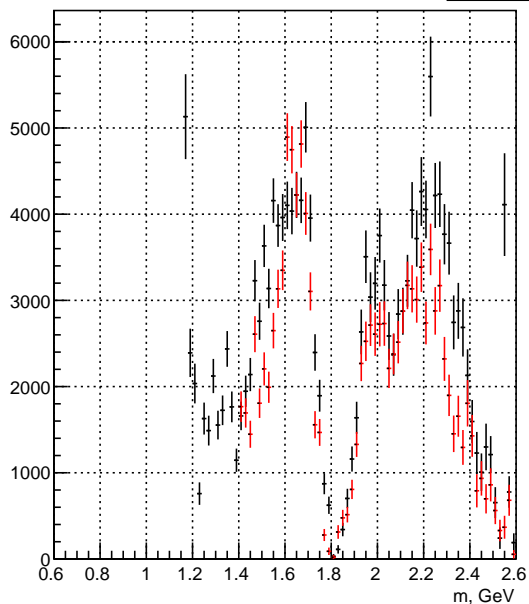
1+P1+ EPSMX

h118
Entries 62680



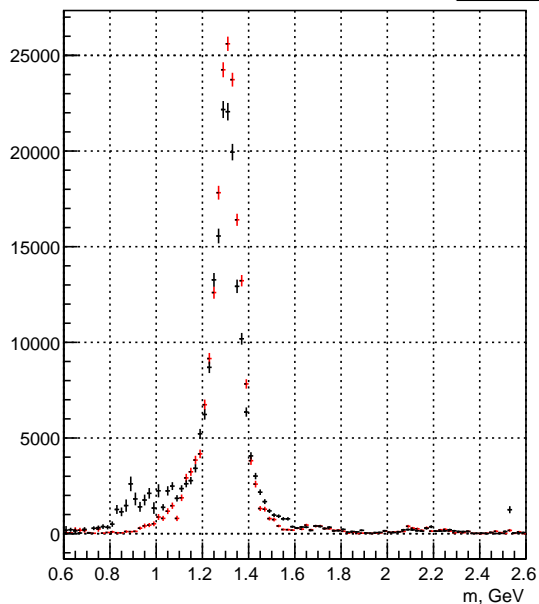
2-D0+ F0(980)

h119
Entries 100



2+D1+ RHO(770)

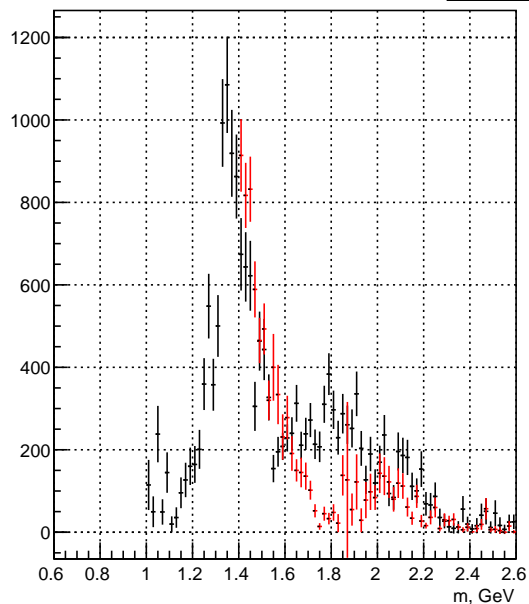
h120
Entries 200035



Black: our results. Red: I.Kachaev results.

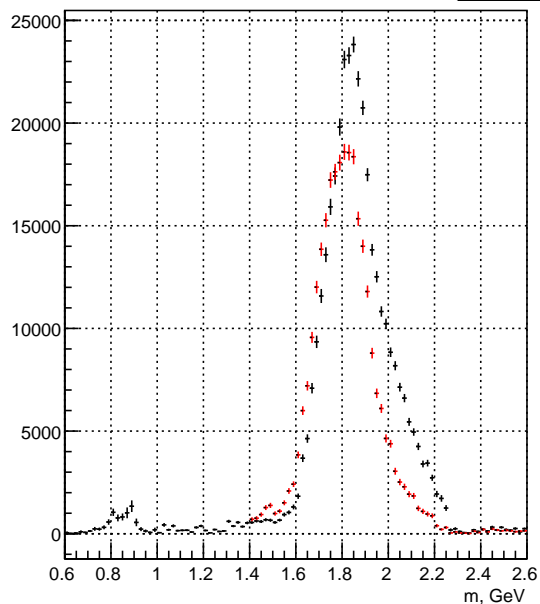
2+P1+ F2(1270)

h121
Entries 100



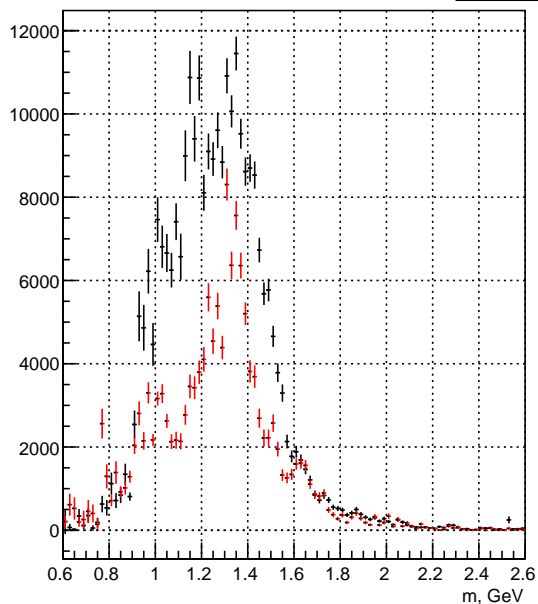
2-D0+ F2(1270)

h122
Entries 100



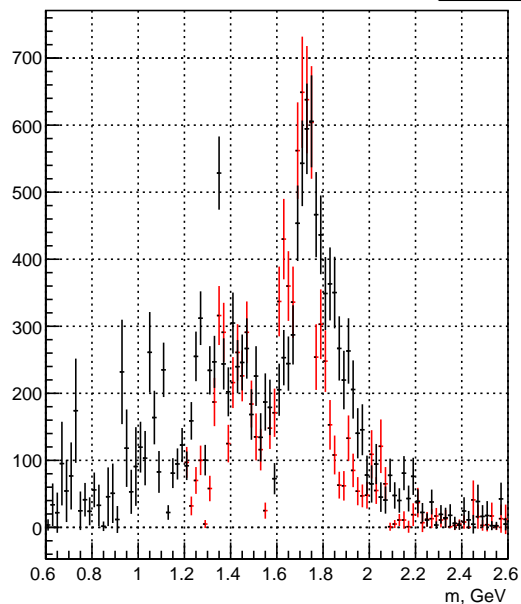
2-P1+ RHO(770)

h123
Entries 100

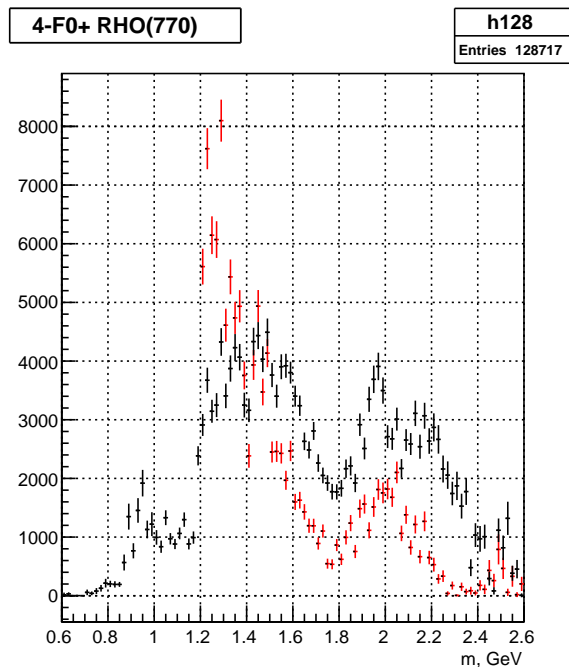
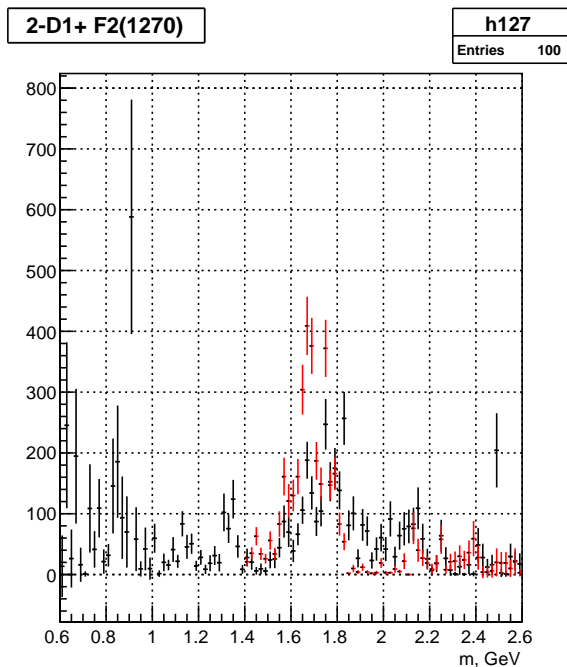
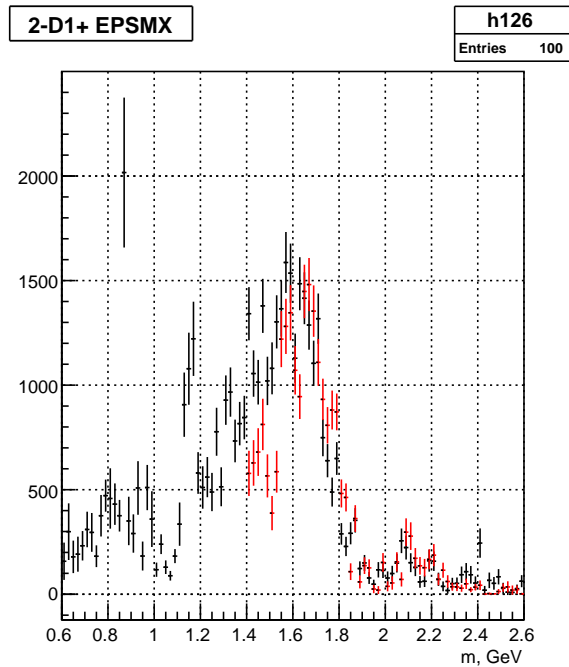
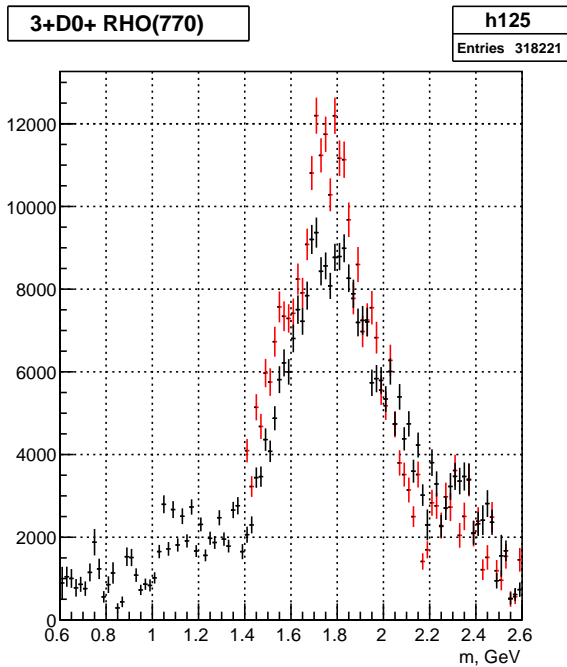


2-F1+ RHO(770)

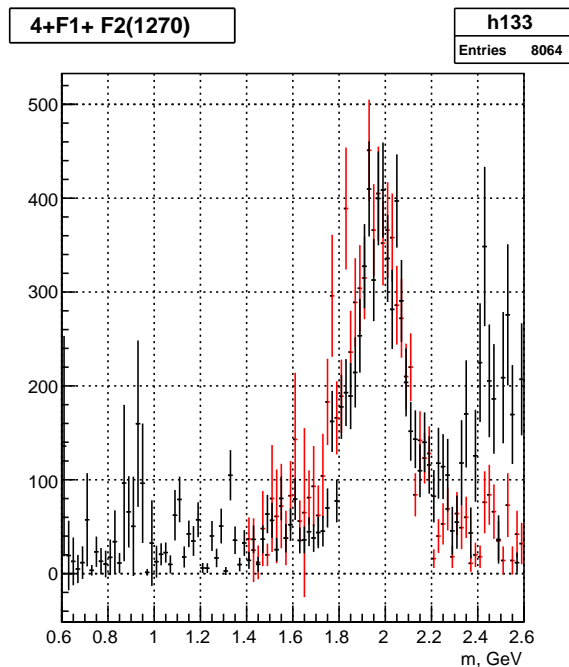
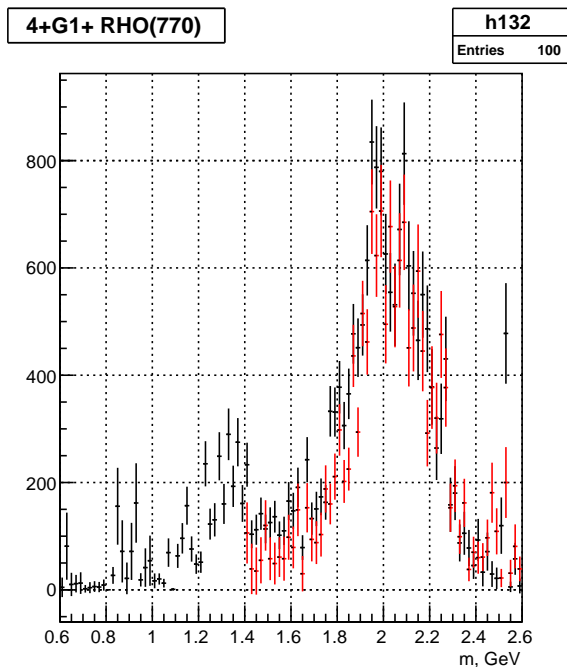
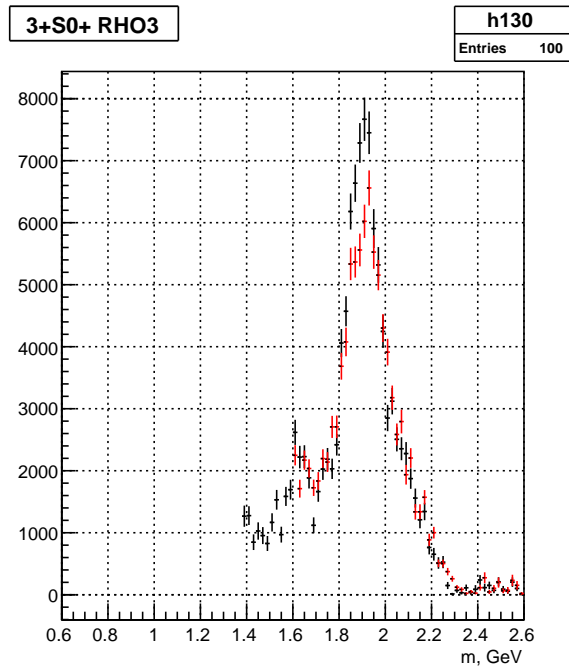
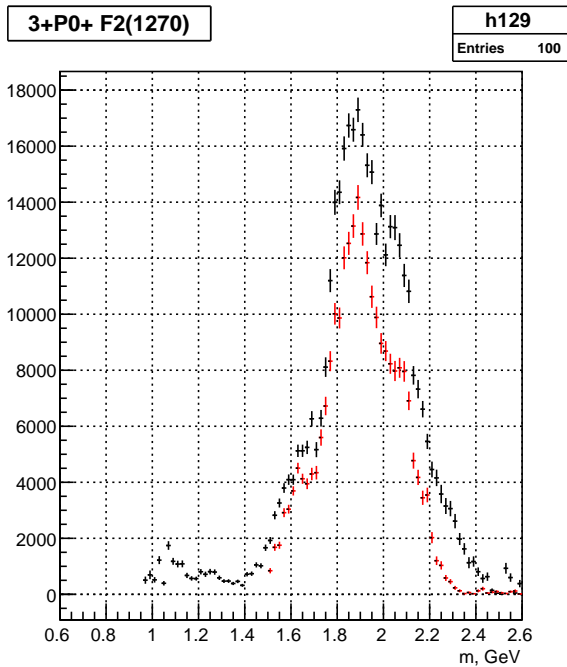
h124
Entries 9160



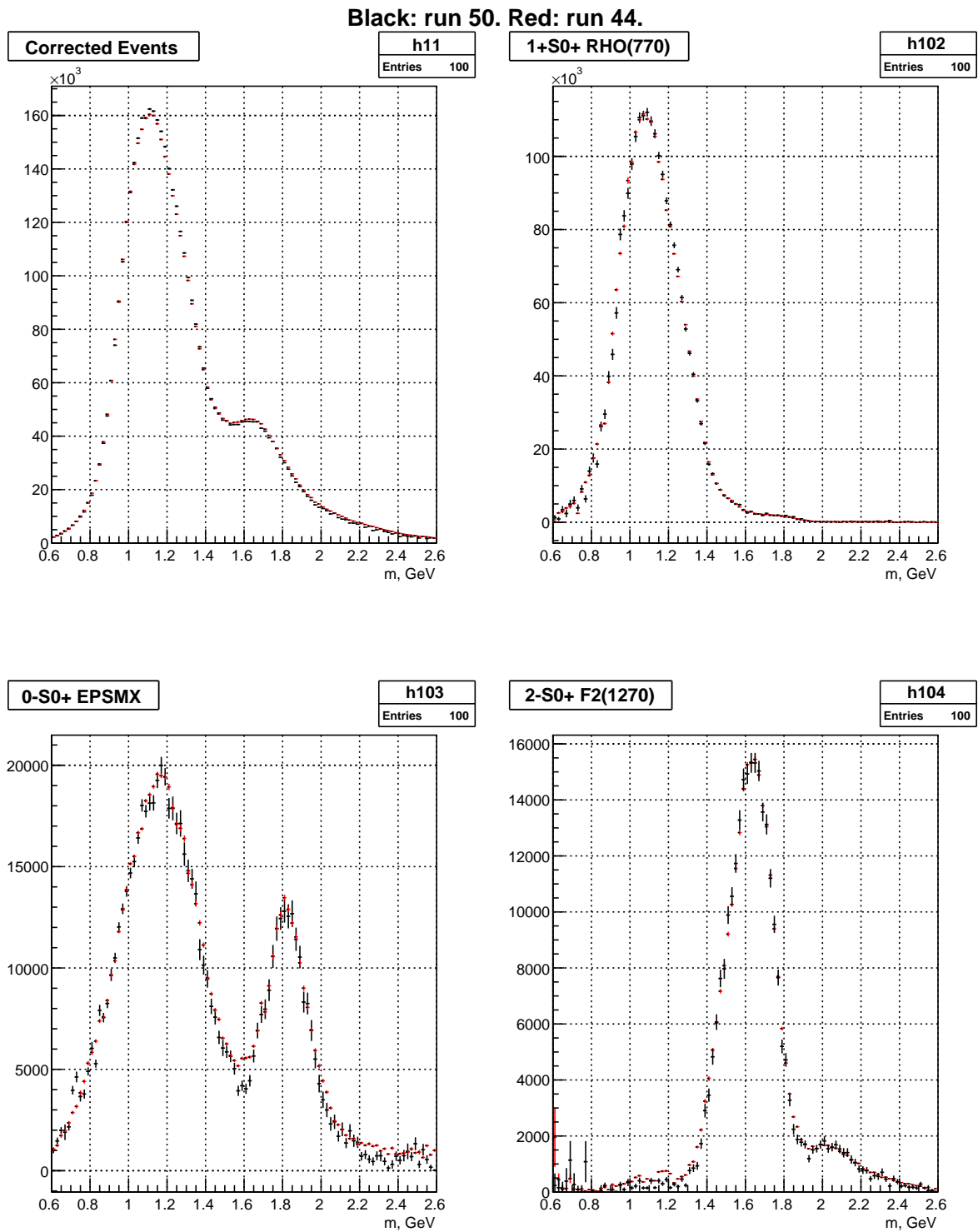
Black: our results. Red: I.Kachaev results.



Black: our results. Red: I.Kachaev results.



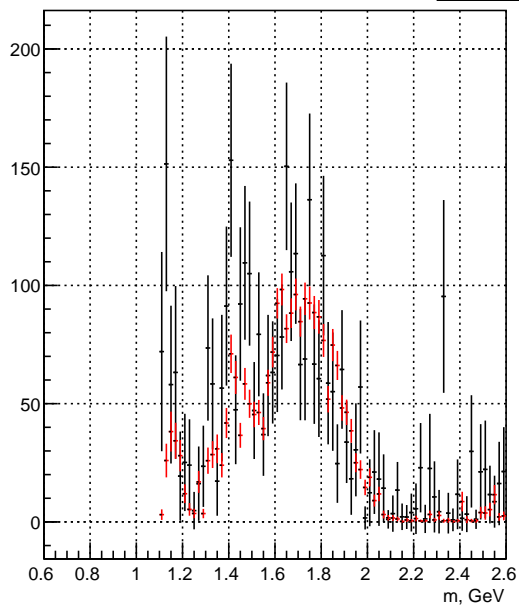
8.3 Результаты анализа сеанса №50 на бериллиевой мишени



Black: run 50. Red: run 44.

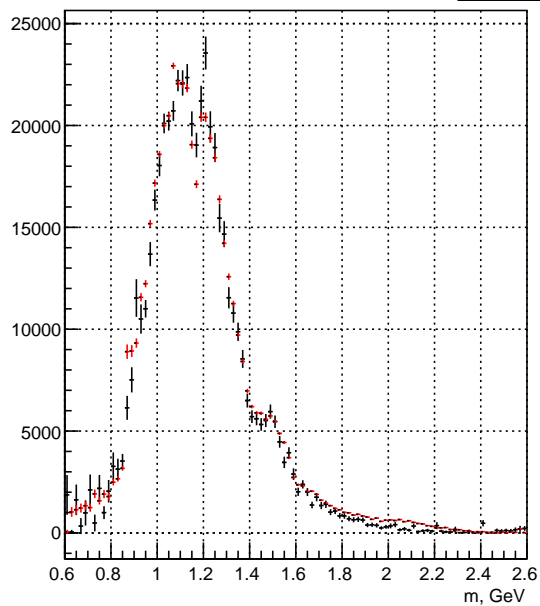
2-S1+ F2(1270)

h105
Entries 100



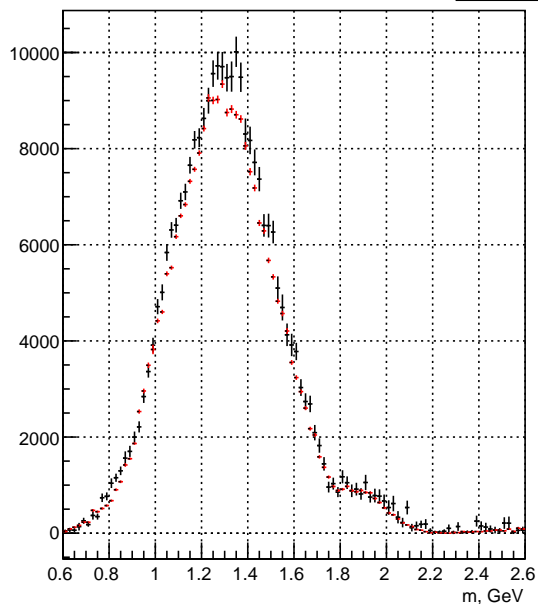
1+P0+ EPSMX

h106
Entries 100



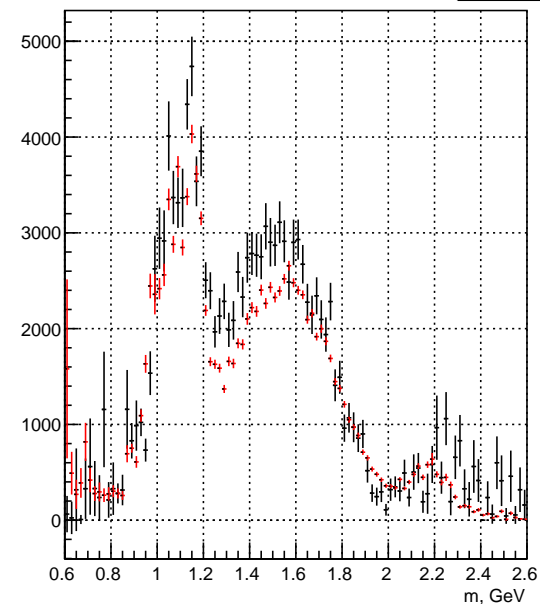
0-P0+ RHO(770)

h107
Entries 100



2-P0+ RHO(770)

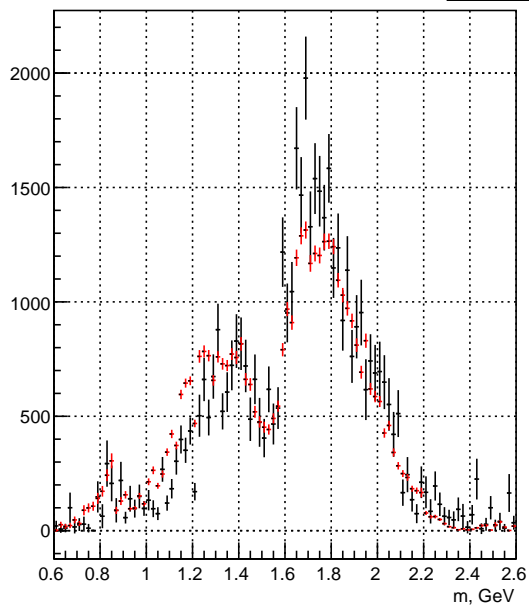
h108
Entries 100



Black: run 50. Red: run 44.

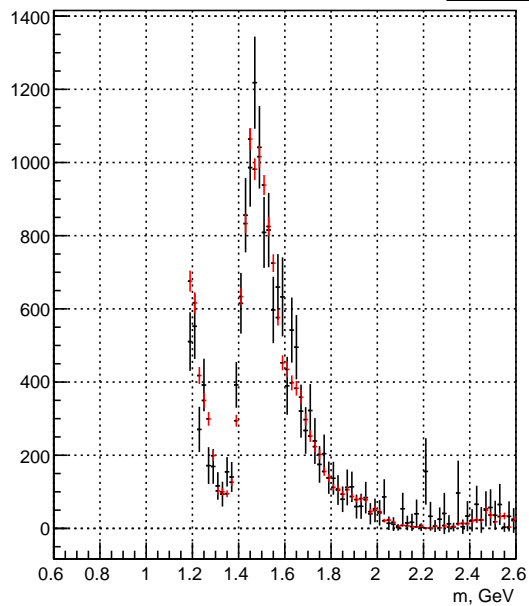
1+D0+ RHO(770)

h109
Entries 100



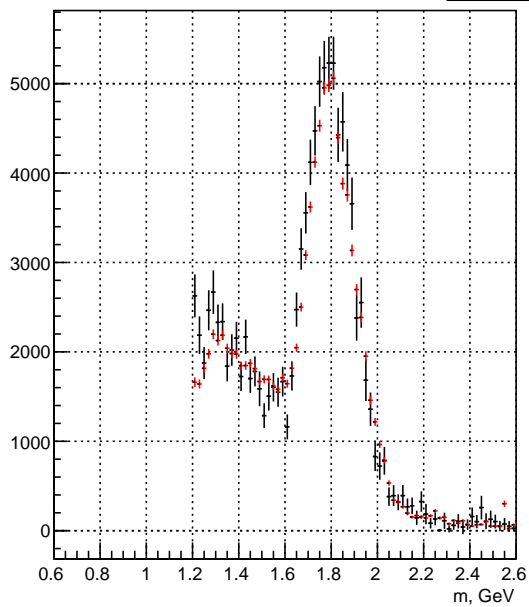
1+P0+ F0(980)

h110
Entries 100



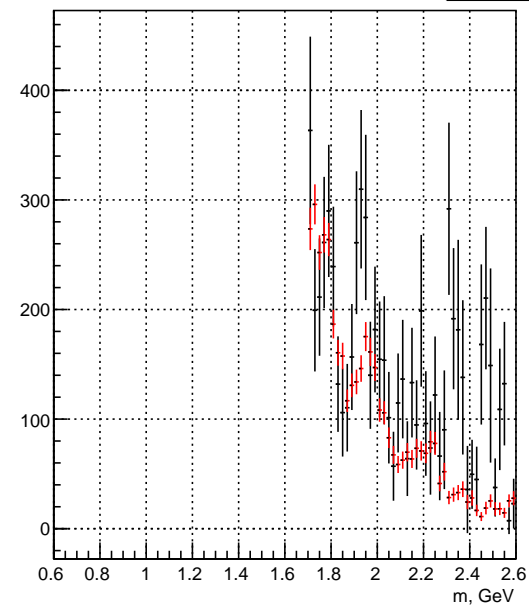
0-S0+ F0(980)

h111
Entries 100



0-S0+ F0(1500)

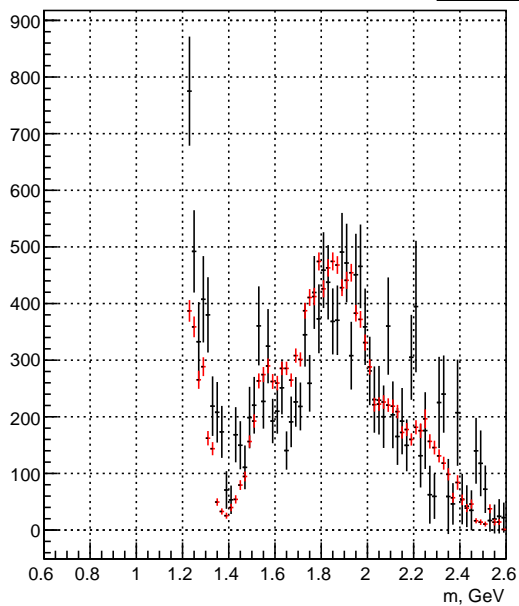
h112
Entries 100



Black: run 50. Red: run 44.

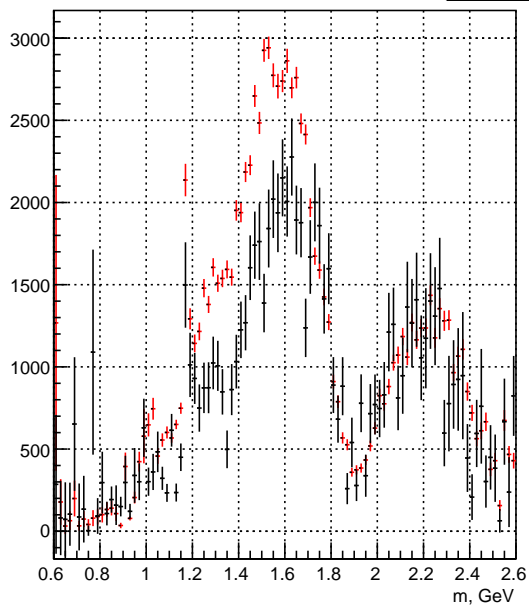
1+P0+ F2(1270)

h113
Entries 100



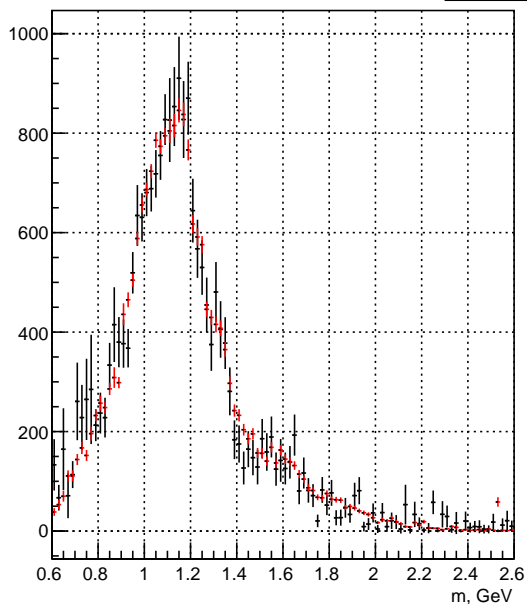
2-D0+ EPSMX

h114
Entries 100



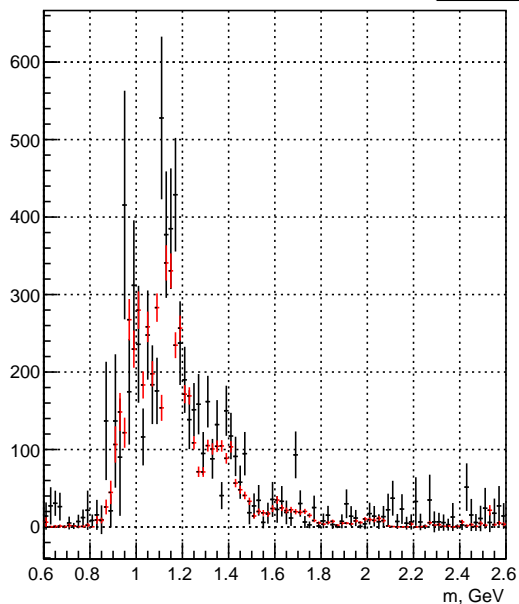
1+S1+ RHO(770)

h115
Entries 100



1-P1+ RHO(770)

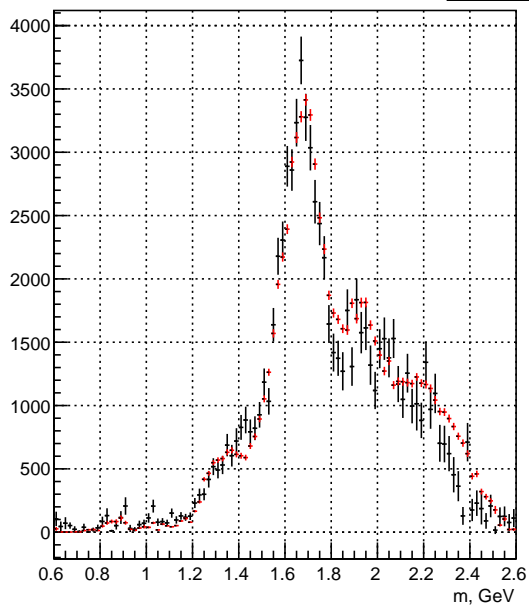
h116
Entries 100



Black: run 50. Red: run 44.

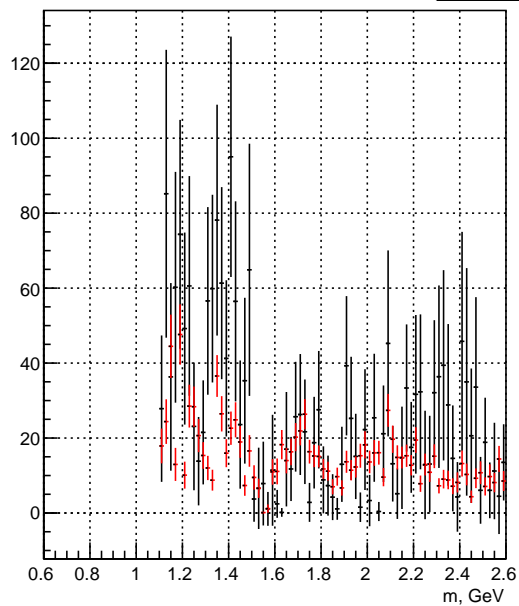
2-F0+ RHO(770)

h117
Entries 100



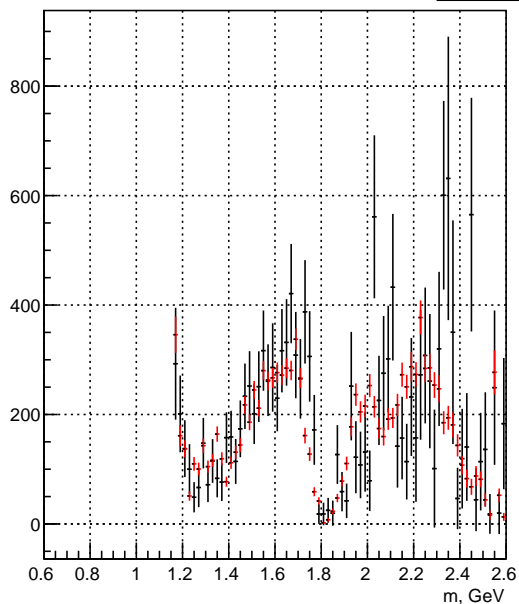
1+P1+ EPSMX

h118
Entries 100



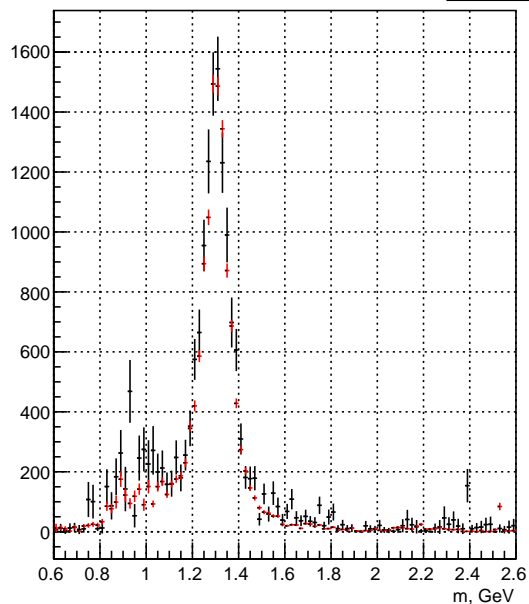
2-D0+ F0(980)

h119
Entries 100



2+D1+ RHO(770)

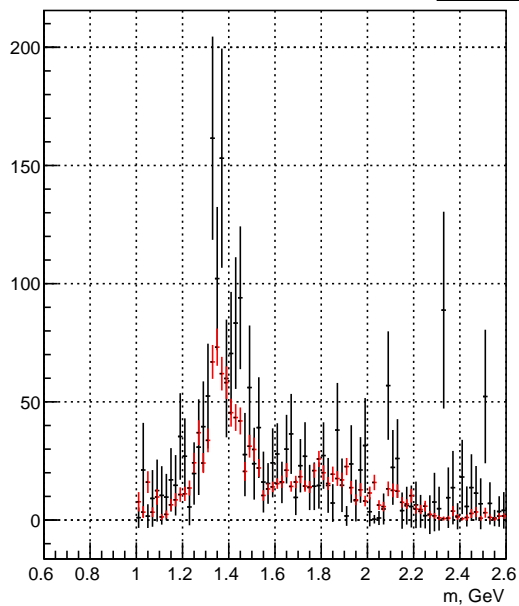
h120
Entries 100



Black: run 50. Red: run 44.

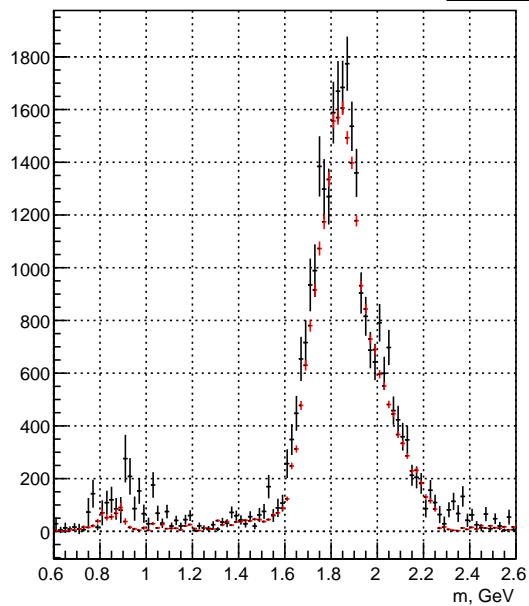
2+P1+ F2(1270)

h121
Entries 100



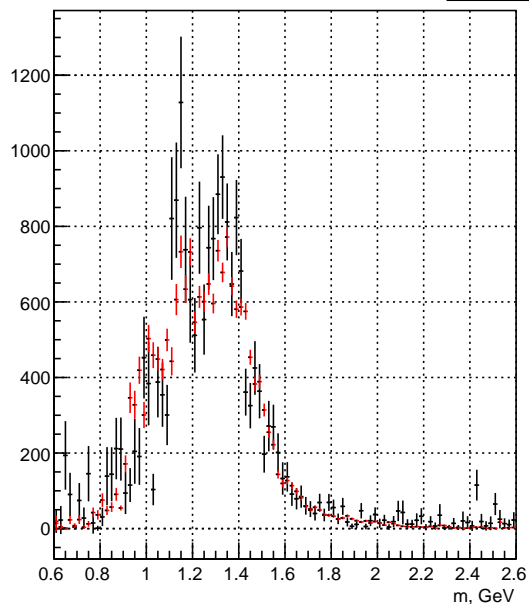
2-D0+ F2(1270)

h122
Entries 100



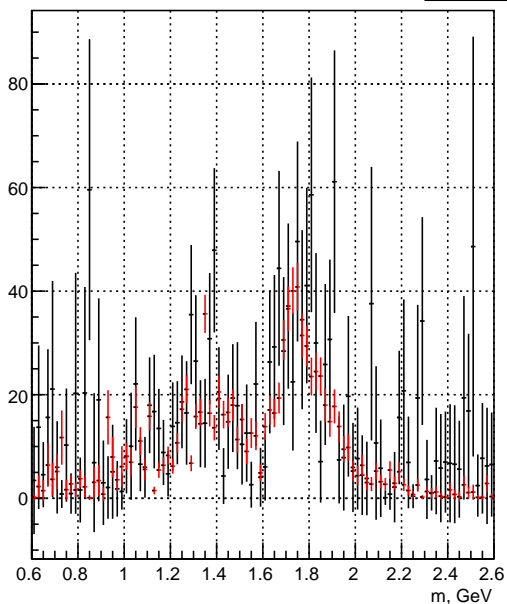
2-P1+ RHO(770)

h123
Entries 100



2-F1+ RHO(770)

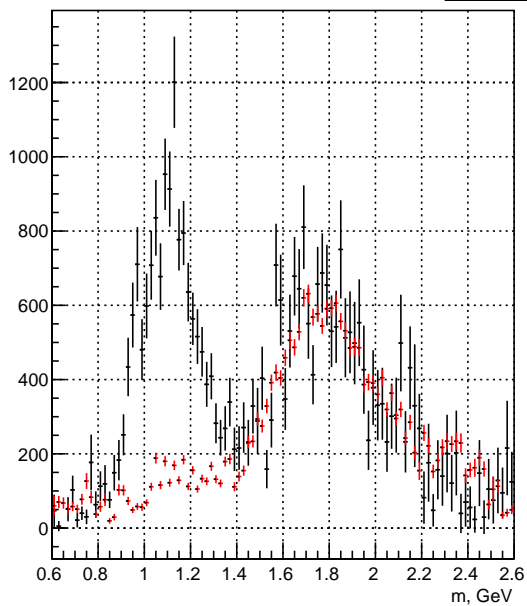
h124
Entries 100



Black: run 50. Red: run 44.

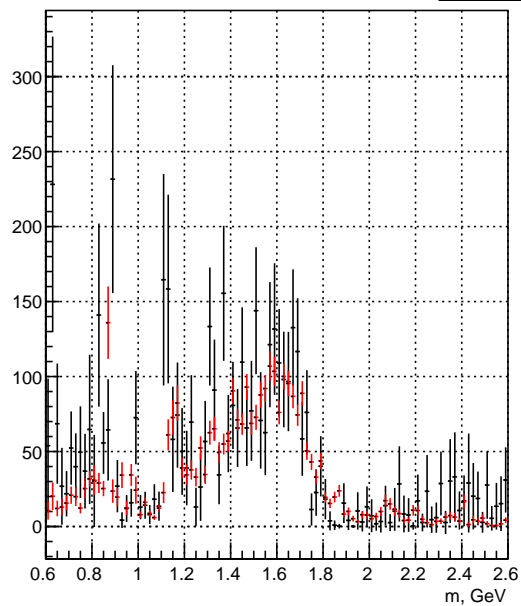
3+D0+ RHO(770)

h125
Entries 100



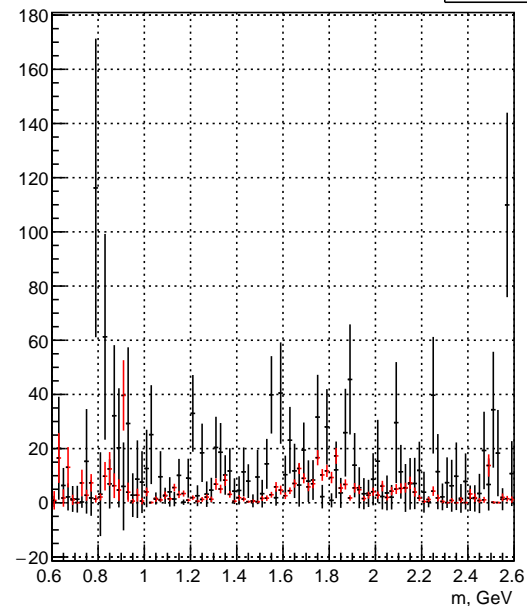
2-D1+ EPSMX

h126
Entries 100



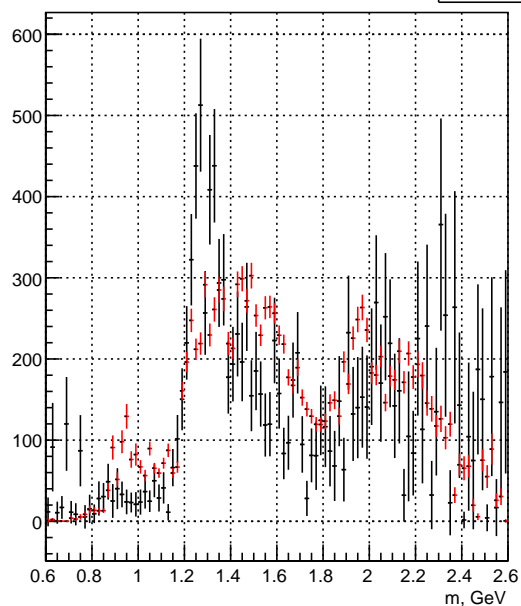
2-D1+ F2(1270)

h127
Entries 100



4-F0+ RHO(770)

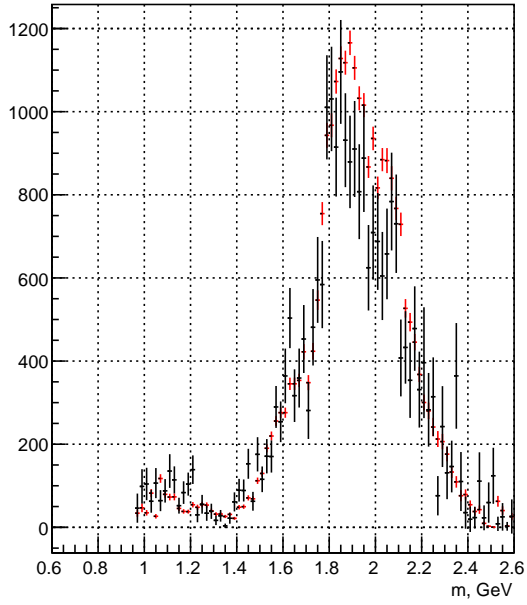
h128
Entries 100



Black: run 50. Red: run 44.

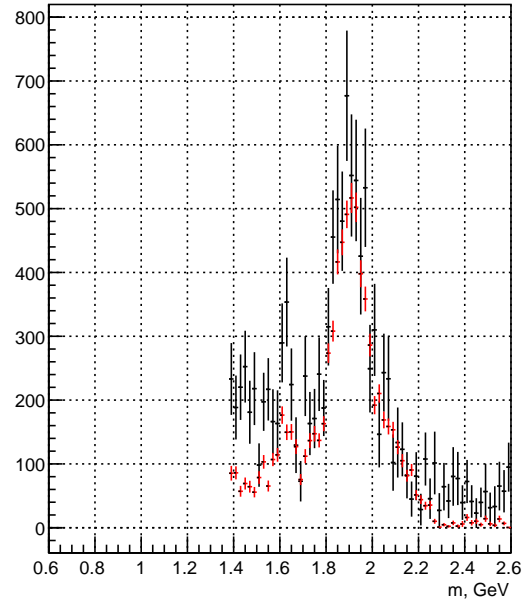
3+P0+ F2(1270)

h129
Entries 100



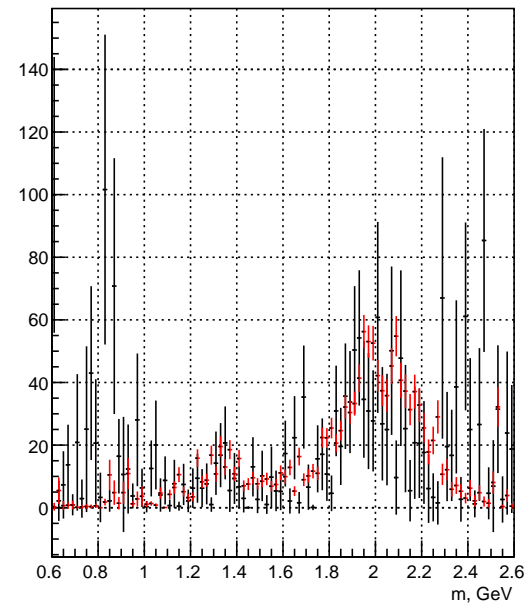
3+S0+ RHO3

h130
Entries 100



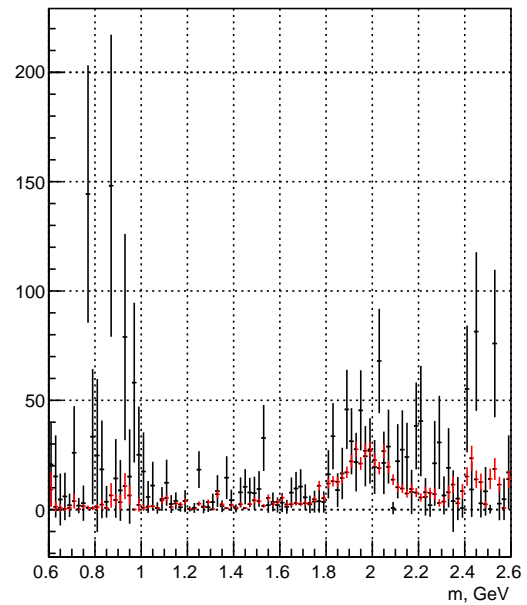
4+G1+ RHO(770)

h132
Entries 100

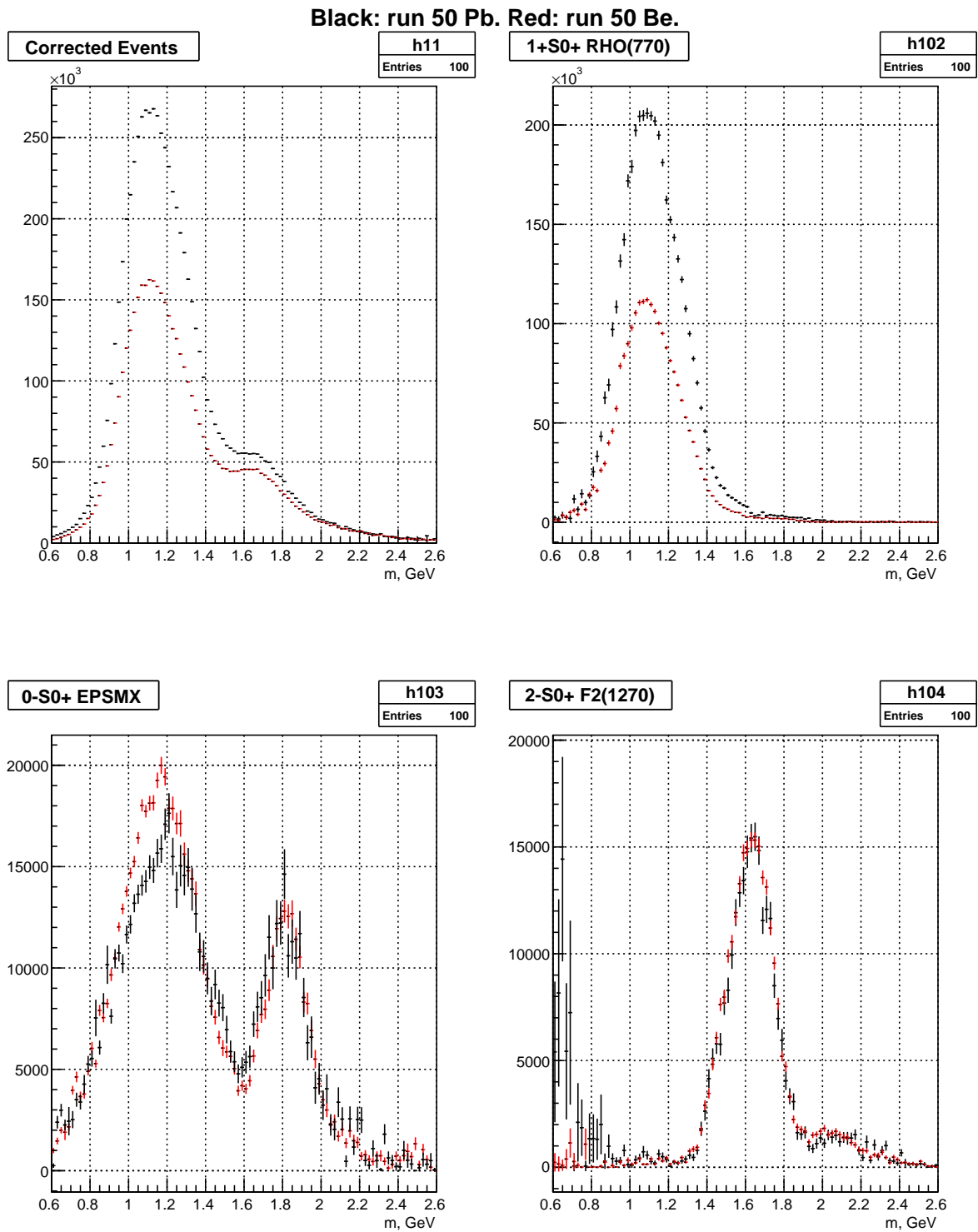


4+F1+ F2(1270)

h133
Entries 100



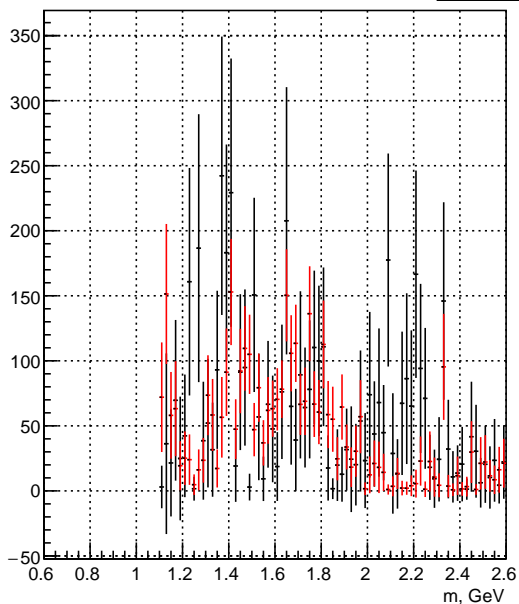
8.4 Результаты анализа сеанса №50 на свинцовой мишени



Black: run 50 Pb. Red: run 50 Be.

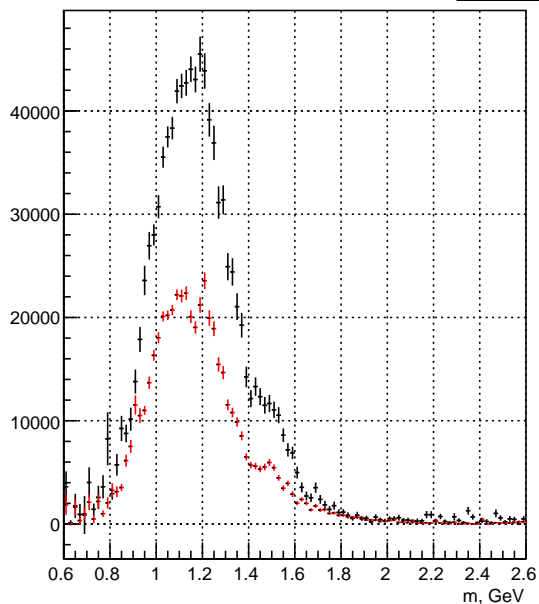
2-S1+ F2(1270)

h105
Entries 100



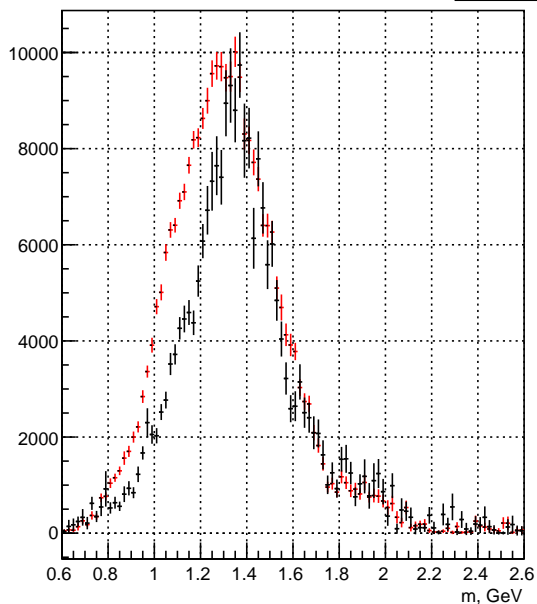
1+P0+ EPSMX

h106
Entries 100



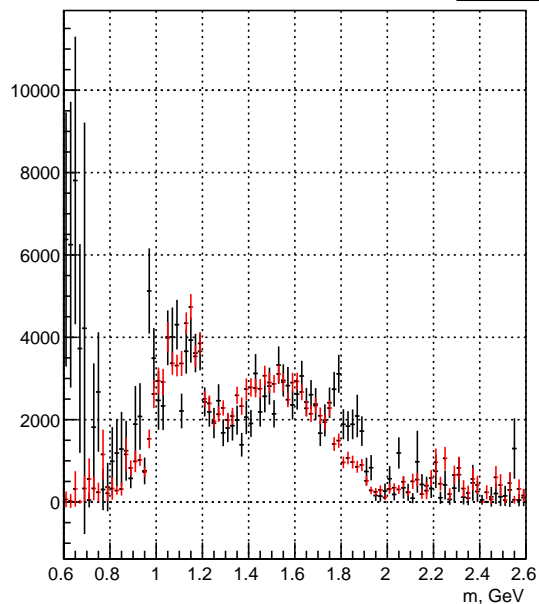
0-P0+ RHO(770)

h107
Entries 100



2-P0+ RHO(770)

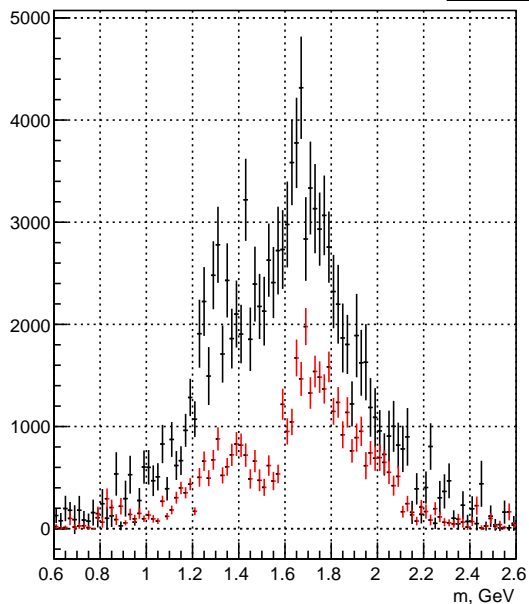
h108
Entries 100



Black: run 50 Pb. Red: run 50 Be.

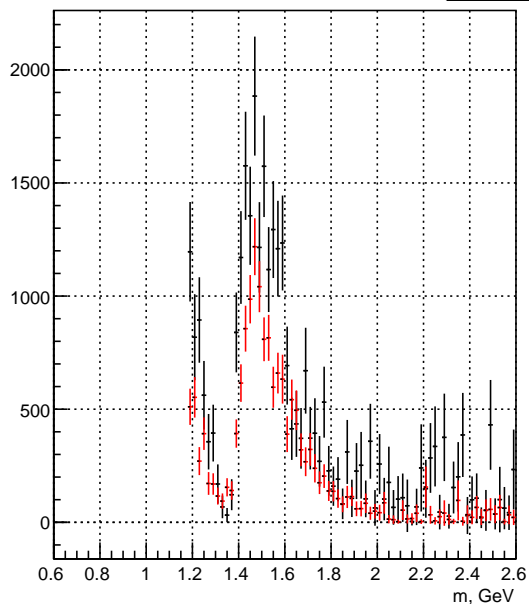
1+D0+ RHO(770)

h109
Entries 100



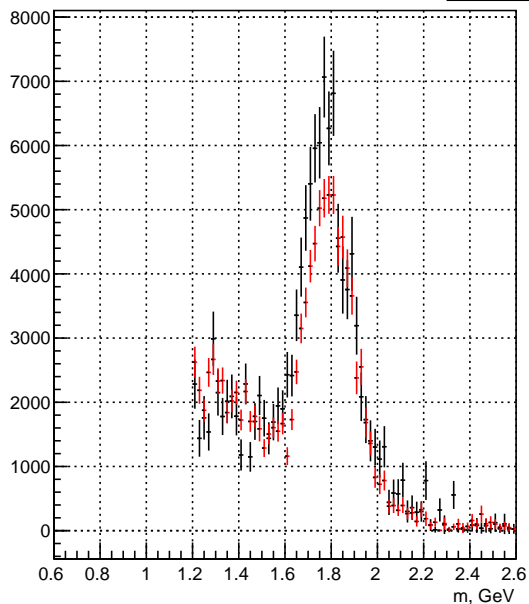
1+P0+ F0(980)

h110
Entries 100



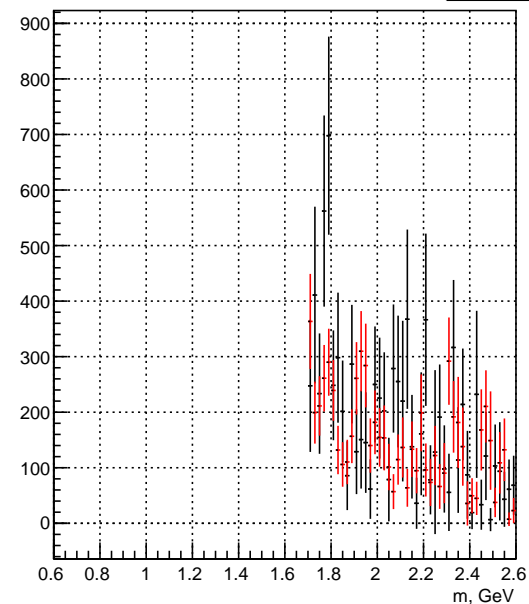
0-S0+ F0(980)

h111
Entries 100



0-S0+ F0(1500)

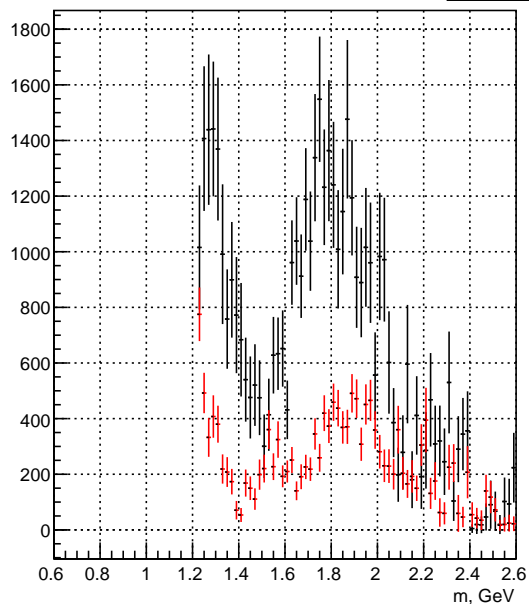
h112
Entries 100



Black: run 50 Pb. Red: run 50 Be.

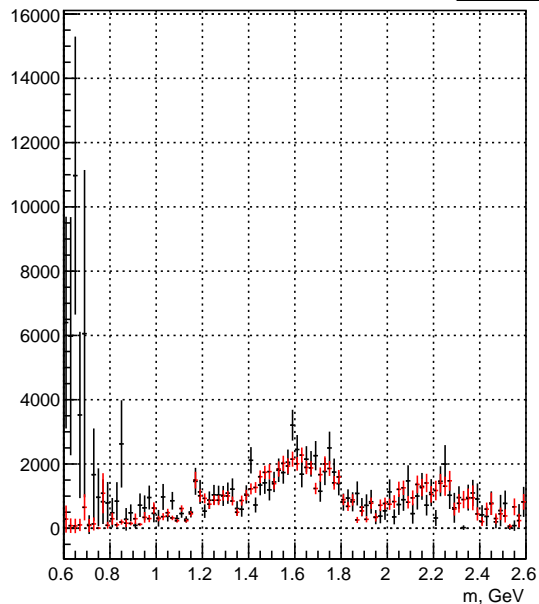
1+P0+ F2(1270)

h113
Entries 100



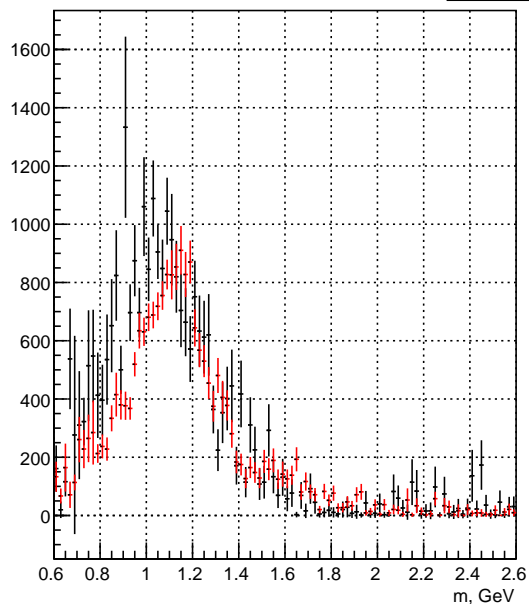
2-D0+ EPSMX

h114
Entries 100



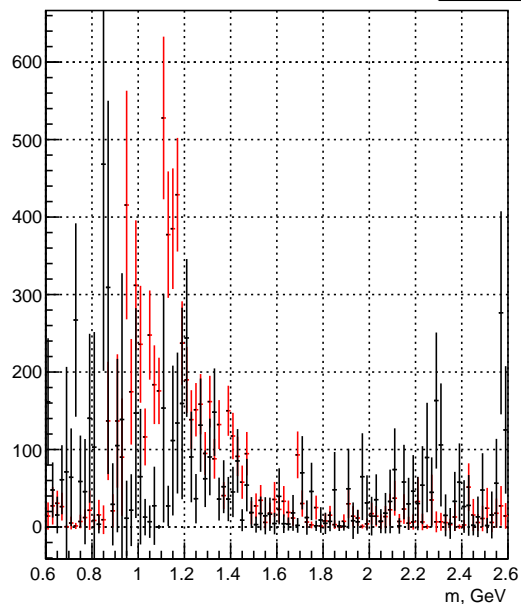
1+S1+ RHO(770)

h115
Entries 100



1-P1+ RHO(770)

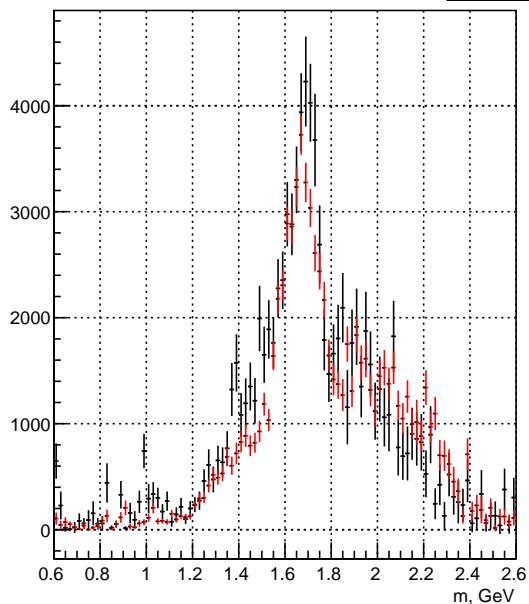
h116
Entries 100



Black: run 50 Pb. Red: run 50 Be.

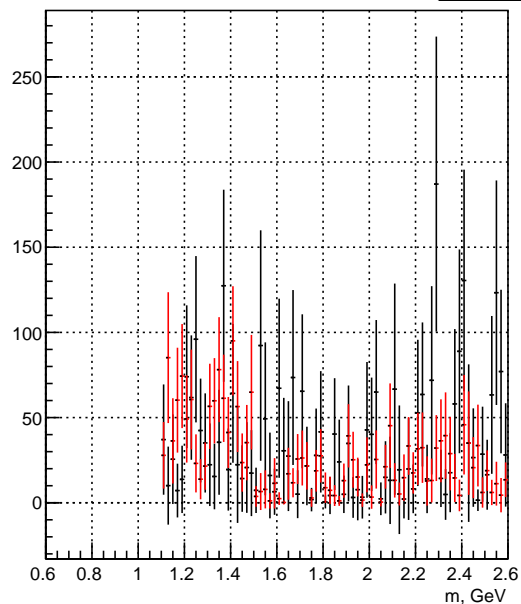
2-F0+ RHO(770)

h117
Entries 100



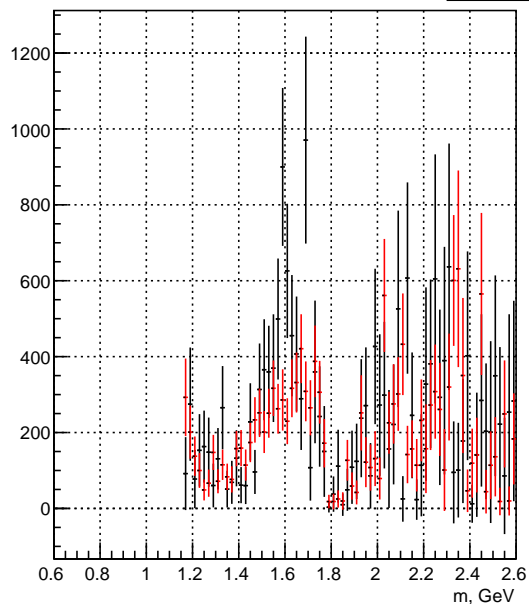
1+P1+ EPSMX

h118
Entries 100



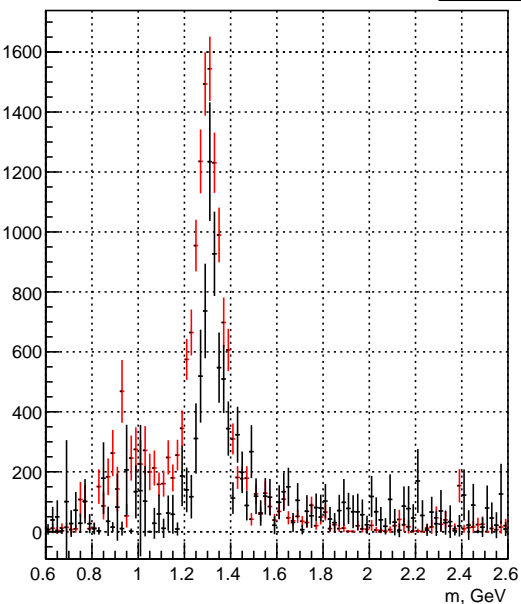
2-D0+ F0(980)

h119
Entries 100



2+D1+ RHO(770)

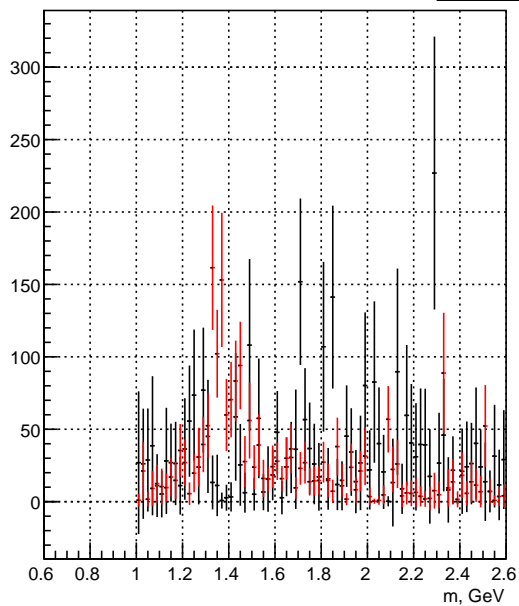
h120
Entries 100



Black: run 50 Pb. Red: run 50 Be.

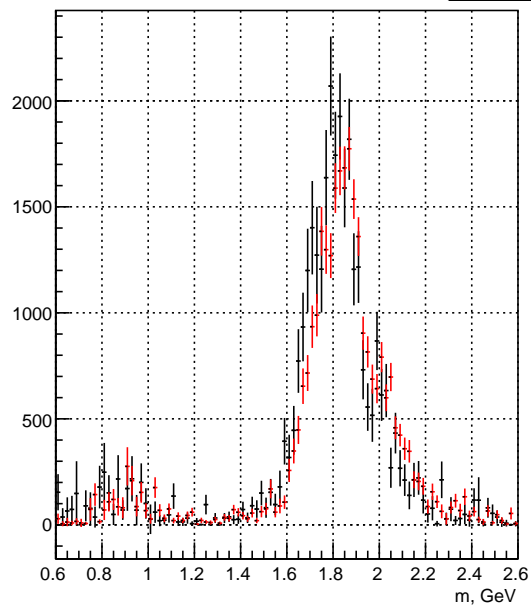
2+P1+ F2(1270)

h121
Entries 100



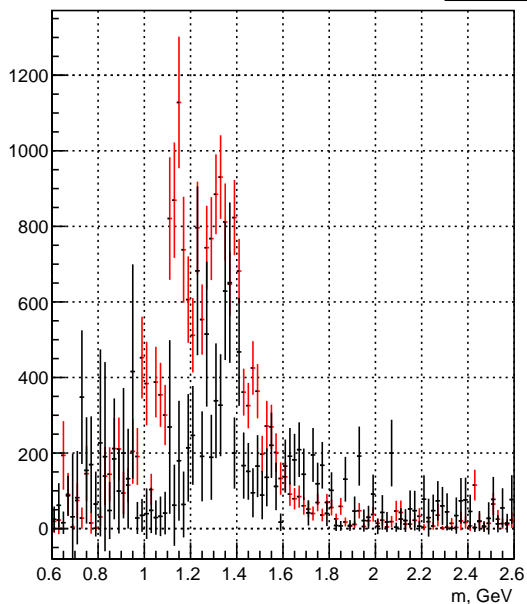
2-D0+ F2(1270)

h122
Entries 100



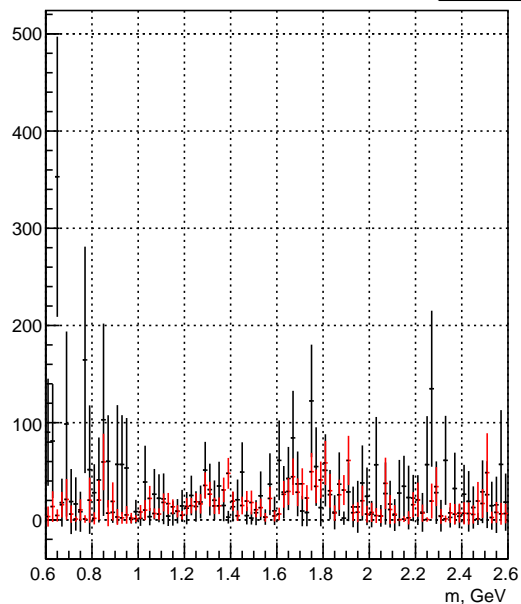
2-P1+ RHO(770)

h123
Entries 100



2-F1+ RHO(770)

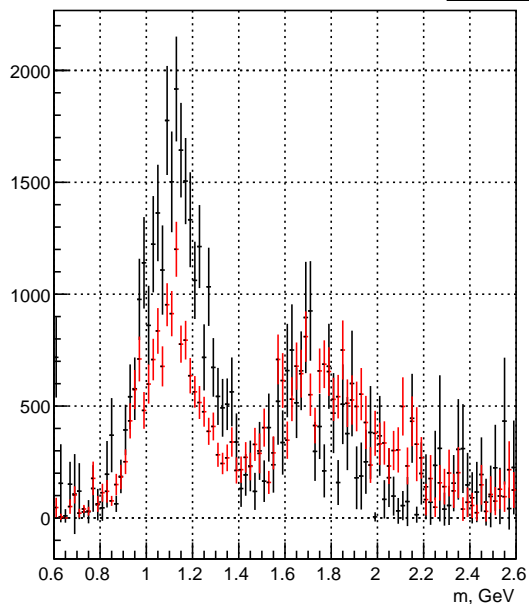
h124
Entries 100



Black: run 50 Pb. Red: run 50 Be.

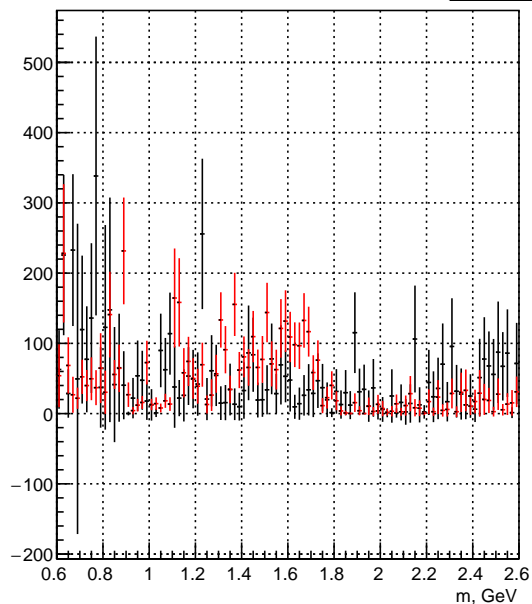
3+D0+ RHO(770)

h125
Entries 100



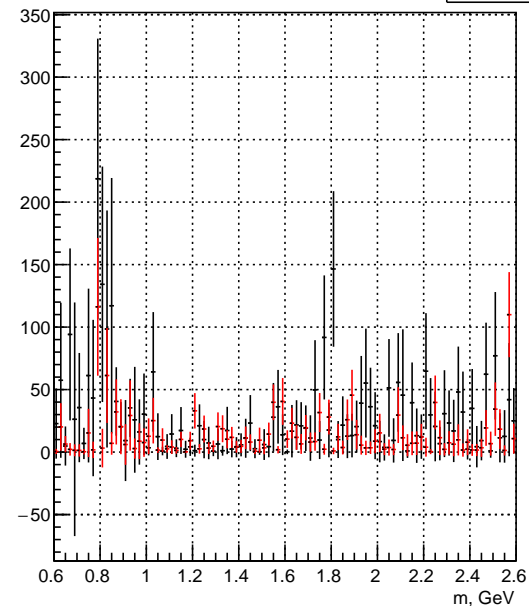
2-D1+ EPSMX

h126
Entries 100



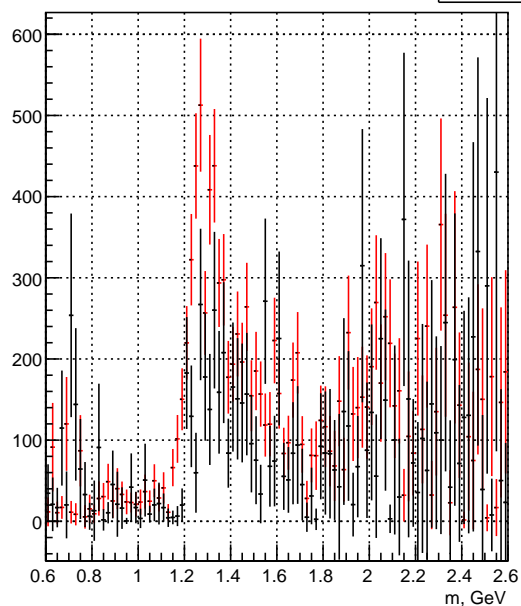
2-D1+ F2(1270)

h127
Entries 100



4-F0+ RHO(770)

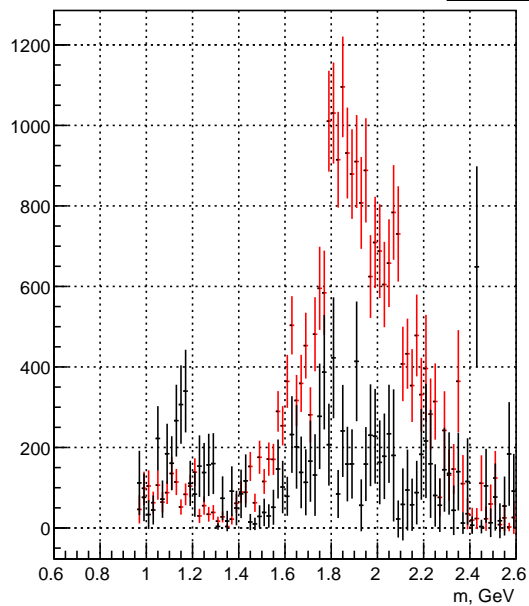
h128
Entries 100



Black: run 50 Pb. Red: run 50 Be.

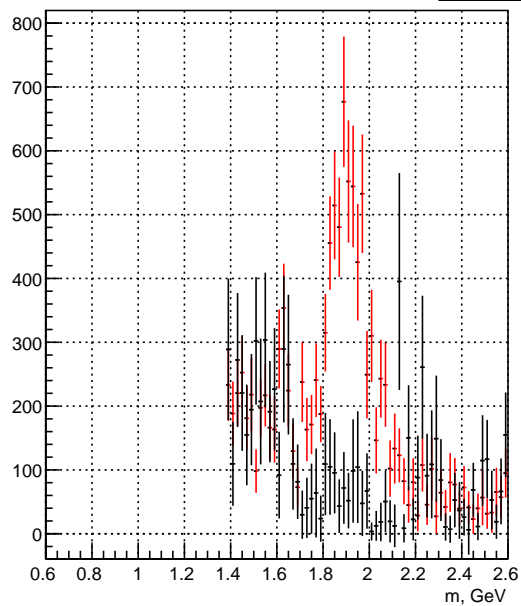
3+P0+ F2(1270)

h129
Entries 100



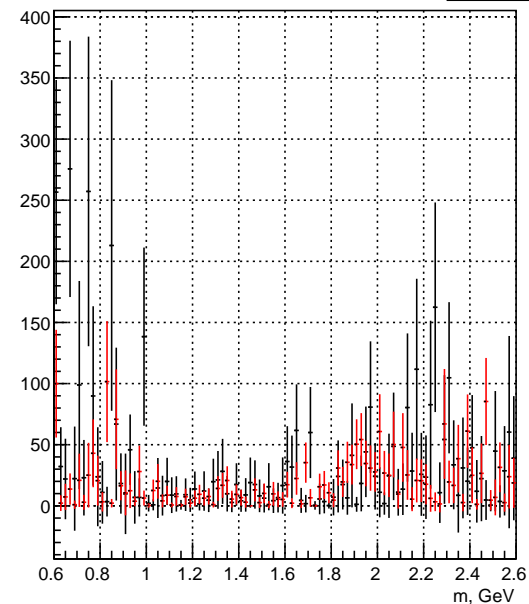
3+S0+ RHO3

h130
Entries 100



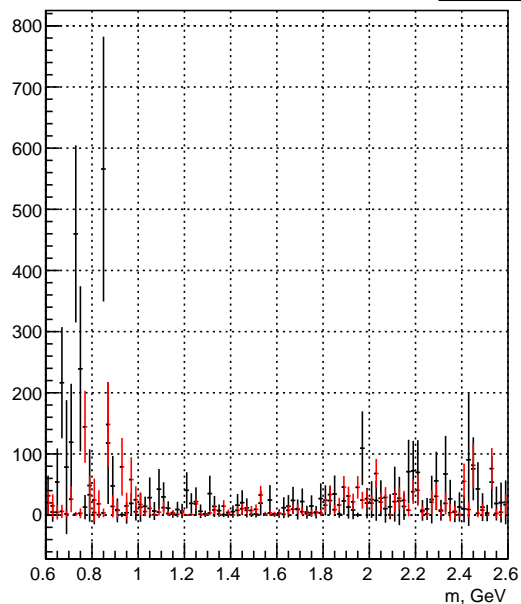
4+G1+ RHO(770)

h132
Entries 100



4+F1+ F2(1270)

h133
Entries 100



Список литературы

- [1] J. D. Hansen, G. T. Jones, G. Otter and G. Rudolph, “Formalism And Assumptions Involved In Partial Wave Analysis Of Three - Meson Systems,” Nucl. Phys. B **81**, 403 (1974).
- [2] F. Haas [COMPASS Collaboration], “Diffractive Dissociation into $\pi - \pi - \pi$ Final States at COMPASS,” AIP Conf. Proc. **1374**, 273 (2011) [arXiv:1109.1789 [hep-ex]].
- [3] B. Liu [BESIII Collaboration], “Partial Wave Analysis at BESIII,” Int. J. Mod. Phys. Conf. Ser. **31**, 1460306 (2014) [arXiv:1403.1337 [hep-ex]].
- [4] I. Kachaev, V. Dorofeev, A. Ekimov, V. Gotman, A. Ivashin, V. Kalendarev, Y. Khokhlov and M. Kholodenko *et al.*, “Partial Wave Analyses of the $\pi^+\pi^-\pi^-$ System at upgraded VES Setup,”
- [5] C. Zemach, “Three pion decays of unstable particles,” Phys. Rev. **133**, B1201 (1964).
- [6] K. J. Peters, “A Primer on partial wave analysis,” Int. J. Mod. Phys. A **21**, 5618 (2006) [hep-ph/0412069].
- [7] Igor Kachaev, PWA tools and methods developed by VES group, Athos 2013.
- [8] Powell, M. J. D. (2002). "UOBYQA: unconstrained optimization by quadratic approximation". Mathematical Programming, Series B (Springer) **92**: 555–582.
- [9] <https://github.com/ROOTPWA-Maintainers/ROOTPWA>
- [10] Thomas F. Degener, TARA — An object-oriented program for a partial wave analysis of sequential two body decays, Computer Physics Communications, Volume 118, Issue 1, April 1999, Pages 34-48.
- [11] Y. Khokhlov, V. Dorofeev, A. Ekimov, V. Gotman, A. Ivashin, I. Kachaev, V. Kalendarev and M. Kholodenko *et al.*, “Partial wave analyses of the $\pi^-\pi^0\pi^0$ and $\pi^-\pi^0$ systems with VES setup,” PoS Hadron **2013**, 088 (2013).
- [12] N. Kaiser and J. M. Friedrich, “Cross-sections for low-energy pi- gamma reactions,” Eur. Phys. J. A **36**, 181 (2008) doi:10.1140/epja/i2008-10582-9 [arXiv:0803.0995 [nucl-th]].
- [13] N. Kaiser, “Chiral corrections to $\pi^-\gamma \rightarrow 3\pi$ processes at low energies,” Nucl. Phys. A **848**, 198 (2010) doi:10.1016/j.nuclphysa.2010.08.014 [arXiv:1007.5277 [hep-ph]].
- [14] C. Adolph *et al.* [COMPASS Collaboration], “First Measurement of Chiral Dynamics in $\pi^-\gamma \rightarrow \pi^-\pi^-\pi^+$,” Phys. Rev. Lett. **108**, 192001 (2012) doi:10.1103/PhysRevLett.108.192001 [arXiv:1111.5954 [hep-ex]].
- [15] C. Adolph *et al.* [COMPASS Collaboration], “Resonance Production and $\pi\pi$ S-wave in $\pi^- + p \rightarrow \pi^-\pi^-\pi^+ + p_{recoil}$ at 190 GeV/c,” Phys. Rev. D **95**, no. 3, 032004 (2017) doi:10.1103/PhysRevD.95.032004 [arXiv:1509.00992 [hep-ex]].

- [16] G. Breit and E. Wigner, “Capture of Slow Neutrons,” Phys. Rev. **49**, 519 (1936). doi:10.1103/PhysRev.49.519
- [17] J. M. Blatt and V. F. Weisskopf, “Theoretical nuclear physics,” doi:10.1007/978-1-4612-9959-2
- [18] F. Von Hippel and C. Quigg, “Centrifugal-barrier effects in resonance partial decay widths, shapes, and production amplitudes,” Phys. Rev. D **5**, 624 (1972). doi:10.1103/PhysRevD.5.624
- [19] K. L. Au, D. Morgan and M. R. Pennington, “Meson Dynamics Beyond the Quark Model: A Study of Final State Interactions,” Phys. Rev. D **35**, 1633 (1987). doi:10.1103/PhysRevD.35.1633
- [20] S. M. Flatte, “On the Nature of 0^+ Mesons,” Phys. Lett. **63B**, 228 (1976). doi:10.1016/0370-2693(76)90655-9
- [21] A. Nappi, “A Pitfall in the use of extended likelihood for fitting fractions of pure samples in mixed samples,” Comput. Phys. Commun. **180**, 269 (2009) doi:10.1016/j.cpc.2008.10.008 [arXiv:0803.2711 [physics.data-an]].
- [22] I. Kachaev and D. Ryabchikov, “PWA with full rank density matrix of the $\pi^+\pi^-\pi^-$ and $\pi^-\pi^0\pi^0$ systems at VES setup,” EPJ Web Conf. **130**, 04003 (2016). doi:10.1051/epjconf/201613004003
- [23] I. Kachaev, *private communication*.