Введение в теорию групп и алгебр Ли

Содержание курса и литература

Аннотация Теория групп и алгебр Ли является важным элементом современной математической культуры и служит основным языком для описания многих физических симметрий и формулировки физических теорий (особенно в физике элементарных частиц и их взаимодействий). Целью курса является изучение основ теории групп и алгебр Ли. В общем виде теория не рассматривается — изложение основано на изучении, в основном, матричных групп Ли. Этого, во-первых, достаточно для большинства приложений, а, во-вторых, позволяет осветить на элементарном уровне значительное количество важных вопросов. Первая часть курса посвящена изучению связи между группами и алгебрами Ли, причем основной акцент делается на полупростые группы Ли. Вторая часть посвящена структурной теории полупростых алгебр Ли, знакомство с которой крайне полезно для последующего изучения теории конечномерных линейных представлений полупростых алгебр Ли. Для усвоения курса необходимы знания математического анализа, включая анализ функций многих переменных, и линейной алгебры. Кроме того, желательно (но не обязательно) знакомство с основами дифференциальной геометрии.

Часть I. Группы и алгебры Ли

Лекция 1. Элементы теории абстрактных групп

Основные определения: группа, абелевы и неабелевы группы, подгруппа, сопряженные подгруппы, инвариантная подгруппа, центральная подгруппа. • Отношения эквивалентности по подгруппе, смежные классы (левые и правые), представители смежных классов, факторпространство, факторгруппа. • Группы, как группы преобразований, действие группы на множестве, левые и правые сдвиги и преобразование подобия на групповом множестве. Орбиты группы и однородные пространства. Подгруппа стабильности точки, отождествление однородного пространства с факторпространством по подгруппе стабильности. Пример: группа $SO(3)$ и сфера S^2.

Лекция 2. Элементы теории абстрактных групп (продолжение)

Алгебраические типы групп: полупростые и простые группы; неполупростые группы; производный ряд и разрешимые группы; центральный ряд и нильпотентные группы; абелевы группы. Примеры разрешимых и нильпотентных групп. • Гомоморфизм групп и связанные с ним подгруппы (образ и ядро). Типы гомоморфизмов (накрытие, вложение, изоморфизм). Автоморфизмы группы внешние и внутренние, инвариантность подгруппы внутренних автоморфизмов в группе всех автоморфизмов. Естественный гомоморфизм (проекция) группы в факторгруппу. Основная теорема о гомоморфизме. • Способы получения новых групп, прямое произведение и полупрямое произведение групп. Примеры полупрямого произведения.

Лекция 3. Гладкие многообразия и группы Ли

Гладкие многообразия, размерность. • Касательные пространства. • Отображения гладких многообразий, диффеоморфизм. Дифференциал отображения. • Регулярные подмногообразия. Регулярные подмногообразия евклидова пространства. • Комплексные аналитические многообразия. • Определение группы Ли. Действительные и комплексные группы Ли. Подгруппы Ли. Матричные группы Ли. • Гомоморфизмы групп Ли. • Алгебраические типы групп Ли.

Лекция 4. Топологические характеристики групп Ли

Компактность топологических пространств, локальная компактность. Компактность областей евклидова пространства. • Локальная компактность групп Ли. Компактные и некомпактные группы Ли. Определение компактности для матричных групп Ли. • Связность топологических пространств, компоненты связности. Линейная связность, компоненты линейной связности. Локально линейно связные пространства. • Локально линейная связность групп Ли. Связные и несвязные группы Ли. Компоненты связности, конечность или счетность компонент группы Ли, связная компонента единицы — инвариантная подгруппа, дискретность факторгруппы по связной компоненте единицы. • Односвязные и неодносвязные группы Ли. • Разбор топологических характеристик на примерах групп $SO(3)$, $SU(2)$ и $SL(2,R)$.

Лекция 5. Основные типы матричных группы Ли

Действительные и комплексные числа, кватернионы. Точные матричные представления комплексных чисел и кватернионов. • Общие линейные группы, специальные линейные группы. • Матричные группы, получаемые наложением линейных ограничений на матричные элементы (неполупростые). Анализ инвариантных подгрупп. • Матричные группы, получаемые наложением квадратичных ограничений на матричные элементы. Невырожденные билинейные формы и классические матричные (линейные) полупростые группы Ли. • Погружение групп с использованием матричных представлений комплексных чисел и кватернионов.

Лекция 6. Алгебры Ли (матричные)

Теорема о порождении связной группы Ли произвольной окрестностью единичного элемента. • Алгебра Ли как касательное пространство в единичном элементе группового многообразия. Коммутатор в алгебре Ли. • Абстрактное определение алгебры Ли. Базисные векторы и структурные константы. Преобразование структурных констант при замене базиса. • Вещественные и комплексные алгебры Ли. • Подалгебра, инвариантная подалгебра. Факторпространство по подалгебре как векторное пространство, факторалгебра. Сопоставление с аналогичными понятиями в группе Ли.

Лекция 7. Алгебры Ли (продолжение)

Типы алгебр Ли, соответствие алгебраическим типам групп Ли. • Гомоморфизм алгебр Ли как дифференциал гомоморфизма групп Ли. Образ и ядро гомоморфизма алгебр Ли. Линейная группа всех автоморфизмов алгебры Ли. Присоединенное действие матричной группы Ли на ее алгебре (присоединенная группа). Дифференцирования и внутренние дифференцирования алгебры Ли, инвариантность алгебры внутренних дифференцирований в алгебре всех дифференцирований алгебры Ли. • Прямая сумма алгебр Ли, полупрямая сумма алгебр Ли.

Лекция 8. Алгебры Ли основных типов матричных групп Ли

Анализ алгебр Ли матричных групп Ли, которые были рассмотрены в Лекции 5. Условия на матрицы, размерности алгебр.

Лекция 9. Экспоненциальное отображение

Экспоненциальное отображение. Существование обратного отображения для достаточно малой окрестности единичного элемента группы Ли. Локальный изоморфизм групп Ли с одинаковой алгеброй Ли. • Основные формулы для матричной экспоненты. • Однопараметрические подгруппы. Дифференциальное уравнение для однопараметрической подгруппы. Бесконечная продолжаемость однопараметрических подгрупп. Периодичность однопараметрических подгрупп, имеющих самопересечения. Периодичность замкнутых однопараметрических подгрупп компактных групп. • Координаты первого и второго рода на группе Ли. Факторпространство группы Ли по подгруппе Ли как гладкое многообразие.

Лекция 10. Связные компактные группы Ли

Теорема о накрытии связной компактной группы Ли экспоненциальным отображением. Доказательство теоремы для унитарных и ортогональных групп методами линейной алгебры. • Торы. Максимальные торы. Стандартные торы для унитарных и ортогональных групп. Ранг компактной группы Ли и ее алгебры Ли. • Доказательство теоремы о накрытии при помощи теоремы Лефшеца о неподвижной точке непрерывного отображения (теорема Лефшеца — без доказательства).

Лекция 11. Группы Ли с одинаковой алгеброй Ли

Несвязные группы Ли. Полупрямое произведение дискретной группы автоморфизмов связной группы Ли и ее самой. • Группа путей в связной группе Ли, инвариантная подгруппа замкнутых путей. Построение односвязной группы Ли — универсальной накрывающей группы. • Связная группа Ли как факторгруппа универсальной накрывающей группы по дискретной центральной подгруппе. • Теорема о монодромии (единственность продолжения локального гомоморфизма на всю односвязную группу) и единственность универсальной накрывающей группы с точностью до изоморфизма.

Лекция 12. Примеры групп Ли низших размерностей с одинаковой алгеброй Ли

Пример 1. Несвязная группа $O(3)$, связная группа $SO(3)$, односвязная группа $SU(2)$ и изоморфная ей группа $Sp(1)$. Их алгебра. Явное построение гомоморфизма $SO(3)$ в $SU(2)$. Дискретный центр в группе $SU(2)$. • Пример 2. Несвязная группа $O(2,1)$, несвязная группа $SO(2,1)$, связная компонента единицы группы $SO(2,1)$ (собственная ортохронная подгруппа), связная группа $SL(2,R)$. Их алгебра. Явное построение гомоморфизма связной компоненты единицы $SO(2,1)$ в $SL(2,R)$. Дискретный центр в группе $SL(2,R)$. Универсальная накрывающая для группы $SL(2,R)$ не является матричной группой (без доказательства). • Пример 3. Несвязная группа $O(4)$, связные группы $SO(4)$ и $SO(3) \times SO(3)$, односвязная группа $SU(2) \times SU(2)$. Их алгебра. Явное построение гомоморфизма $SO(4)$ в $SU(2) \times SU(2)$. Дискретные центры в этих группах. • Пример 4. Несвязная группа $O(3,1)$, несвязная группа $SO(3,1)$, связная собственная ортохронная группа Лоренца, односвязная группа $SL(2,C)$. Их алгебра. Явное построение гомоморфизма связной компоненты единицы $SO(3,1)$ (собственной ортохронной группы Лоренца) в $SL(2,C)$.

Лекция 13. Линейные представления групп и алгебр Ли (основные понятия и определения)

Определение линейного представления группы Ли. Определение линейного представления алгебры Ли. Дифференциал представления группы Ли как представление ее алгебры Ли. • Точные представления. • Неприводимые, приводимые и вполне приводимые представления. • Подобные представления. • Вещественные и комплексные представления. Комплексно сопряженные представления. • Унитарные представления. Полная приводимость конечномерных унитарных представлений. • Лемма Шура. • Присоединенное представление матричной группы Ли (присоединенная группа), отсутствие центра у присоединенной группы. Присоединенное представление алгебры Ли (алгебра внутренних дифференцирований). Структурные константы как матрицы присоединенного представления базисных векторов алгебры Ли. • Точность нетривиальных конечномерных представлений простых алгебр Ли. Нетривиальные конечномерные представления простых групп Ли и дискретные центральные подгруппы.

Лекция 14. Некоторые физические приложения

Группы Ли, калибровочные симметрии и калибровочные поля. Почему калибровочные поля лежат в алгебре Ли. • Унитарные представления и квантовая теория. • Представление алгебры Ли в алгебре линейных дифференциальных операторов. Пример: алгебра $so(3)$ и квантово-механический оператор момента количества движения. • Представление алгебры Ли в алгебре бозонных и фермионных операторов рождения и уничтожения.

Лекция 15. Неприводимые представления алгебры su(2)

Комплексификация вещественной алгебры Ли. Алгебры $su(2)$ и $sl(2,C)$. • Построение всех конечномерных комплексных неприводимых представлений алгебр $sl(2,C)$ и $su(2)$ методом старшего веса. Весовые векторы представления. Размерность неприводимых представлений, целый и полуцелый максимальный вес представления (“спин”). • Унитарность неприводимых представлений алгебры $su(2)$. • Вещественно-подобные представления (псевдовещественные и потенциально-вещественные). Псевдовещественность представлений с полуцелым “спином” и вещественность представлений с целым “спином” алгебры $su(2)$.

Лекция 16. Теоремы Ли и Энгеля

Одномерность комплексных неприводимых представлений абелевых групп и алгебр Ли. • Эквивалентность утверждений: всякое комплексное неприводимое представление одномерно — все матрицы конечномерного комплексного представления имеют общий собственный вектор — все матрицы конечномерного комплексного представления одновременно приводятся к треугольному виду. • Теорема Ли о комплексных конечномерных представлениях разрешимых групп и алгебр Ли. Доказательство в групповом варианте. • Нильпотентность матриц присоединенного представления нильпотентной алгебры Ли. Теорема Энгеля.

Лекция 17. Скалярное произведение Киллинга

Скалярное произведение Киллинга в алгебре Ли. Метрический тензор Картана, выражение через структурные константы. Инвариантность скалярного произведения Киллинга относительно всех автоморфизмов алгебры Ли. • Ограничение скалярного произведения Киллинга на подалгебру и на инвариантную подалгебру. • Критерии (в терминах скалярного произведения Киллинга) нильпотентности, разрешимости и полупростоты (критерий Картана) алгебры Ли. • Разложения алгебры Ли по полупростой подалгебре и ее ортогональному дополнению относительно скалярного произведения Киллинга. • Разложение полупростой алгебры в прямую сумму полупростых. Точность присоединенного представления полупростой алгебры.

Лекция 18. Скалярное произведение Киллинга в полупростых алгебрах Ли

Отрицательная определенность скалярного произведения Киллинга в алгебре Ли полупростой компактной группы Ли. Теорема Вейля о компактности универсальной накрывающей группы полупростой компактной группы Ли (без доказательства). Критерий компактности связной полупростой группы Ли. Компактные алгебры Ли. • Некомпактные полупростые группы Ли, неопределенность знака скалярного произведения Киллинга в их алгебрах. Разложение Картана для полупростой вещественной некомпактной алгебры Ли. • Теорема о том, что любое дифференцирование полупростой алгебры Ли является внутренним. • Вычисление метрического тензора Картана в произвольном точном матричном представлении (полу)простой алгебры Ли. • Квадратичные операторы Казимира для полупростой алгебры Ли.

Лекция 19. Разложение Картана для (связных) некомпактных классических матричных групп Ли

Полярное разложение матриц. Разложение Картана для связной компоненты единицы общей (специальной) линейной группы. Теорема Шевалле для алгебраических подгрупп $GL(n, R)$, замкнутых относительно транспонирования матриц.

Лекция 20. Метрический тензор и элемент объема на групповом многообразии

Метрический тензор Картана как метрический тензор в единичном элементе группового многообразия. Распространение по всему групповому многообразию при помощи левых (правых) сдвигов. Совпадение лево- и правоинвариантной метрики. • Метрический тензор на фактормногообразии. • Элемент объема в касательном пространстве единичного элемента. Распространение по всему групповому многообразию при помощи левых (правых) сдвигов: левоинвариантная и правоинвариантная меры. Совпадение лево- и правоинвариантной меры для полупростых групп. Согласованность меры и метрики для полупростых групп. Формула интегрирования по группе Ли. • Нахождение элемента объема и метрического тензора на примере группы $SL(2,R)$. • Конечность объема группового многообразия компактных групп. Унитарность конечномерных представлений компактных групп (метод усреднения по группе). Полная приводимость конечномерных представлений компактных групп. • Неунитарность конечномерных представлений некомпактных групп.

Часть II. Классификация простых (вещественных) алгебр Ли

Лекция 21. Предварительные сведения, необходимые для построения классификации простых алгебр Ли

Комплексификация вещественной алгебры Ли. Овеществление и вещественные формы комплексной алгебры Ли. Компактные и некомпактные вещественные формы, унитарный трюк Вейля. Примеры: вещественные формы алгебр $so(n,C)$ и $sl(n,C)$. • Обобщенные собственные векторы и корневые подпространства линейного оператора. Разложение векторного пространства в прямую сумму корневых подпространств линейного оператора. Нормальная жорданова форма матрицы. (Напоминание или доказательство).

Лекция 22. Подалгебра Картана

Общее определение ранга алгебры. Регулярный элемент. • Разложение алгебры в прямую сумму корневых подпространств присоединенного оператора регулярного элемента. • Коммутационные соотношения для корневых подпространств. Соотношения ортогональности. Подалгебра, отвечающая нулевому корню, невырожденность скалярного произведения Киллинга на этой подалгебре. Наличие ненулевых корней с противоположными знаками. • Подалгебра Картана как максимальная абелева подалгебра, содержащая регулярный элемент. Совпадение подалгебры Картана с подалгеброй, отвечающей нулевому корню.

Лекция 23. Система корней и структура полупростой алгебры Ли

Разложение полупростой алгебры в прямую сумму корневых подпространств всех элементов подалгебры Картана. • Корни как линейные функционалы на подалгебре Картана. Корневые векторы. Базис в подалгебре Картана и система корней. • Одновременная диагонализация присоединенным матриц всех элементов подалгебры Картана. • Подалгебры $sl(2,C)$, ассоциированные с каждым корневым вектором. Структура полупростой алгебры как прямая сумма неприводимых представлений подалгебры $sl(2, C)$ (для каждого ненулевого корня). • Одномерность собственных подпространств (с одним ненулевым корнем связан один вектор). Отсутствие коллинеарных корней (кроме противоположного).

Лекция 24. Коммутационные соотношения в полупростой алгебре Ли

Базис Картана-Вейля. Структура коммутационных соотношений. • Серия корней, порождаемая одним корнем из другого, основная формула для целочисленных характеристик серии. Полнота системы корней в дуальном пространстве к подалгебре Картана. Действительность корней (возможность выбора соответствующего базиса в подалгебре Картана). Евклидово скалярное произведение для корней. • Соотношение между структурными константами в базисе Картана-Вейля. Выражение структурных констант через характеристики серий корней.

Лекция 25. Система корней и простые корни

Свойства системы корней (отражения, углы между корнями и отношения длин), полностью ее определяющие. • Приводимые и неприводимые системы корней — полупростые и простые алгебры. • Упорядочивание корней. Положительные и отрицательные корни. Простые корни. Восстановление системы корней по системе простых корней. • Матрица Картана. Теорема об изоморфизме алгебр Ли, имеющих одинаковые системы простых корней. Окончательное доказательство вещественности структурных констант.

Лекция 26. Классификация систем простых корней

Диаграммы Дынкина. Связные диаграммы Дынкина и их классификация. Четыре бесконечные серии и пять исключительных диаграмм Дынкина. Эквивалентные диаграммы Дынкина и изоморфизм алгебр малых размерностей, принадлежащих к разным сериям.

Лекция 27. Вещественные формы простых комплексных алгебр Ли

Компактная и нормальная (максимально некомпактная) вещественные формы. Инволютивный автоморфизм в алгебре, связанное с ним разложение Картана и использование унитарного трюка Вейля. Построение всех вещественных форм комплексных алгебр из четырех бесконечных серий.

Список литературы

1. Gilmore, Robert. Lie Groups, Physics, and Geometry: An Introduction for Physicists, Engineers and Chemists. — Cambridge University Press, 2008.
2. Гюрши Ф. Введение в теорию групп // Теория групп и элементарные частицы: сб. статей под ред. Д.Д. Иваненко. — М.: Мир, 1967.
3. Georgi, Howard. Lie Algebras in Particle Physics. — Westview Press, 1999.

4. Ляховский В.Д., Болохов А.А. Группы симметрии и элементарные частицы. — М.: Едиториал УРСС, 2002.
5. Желобенко Д.П. Компактные группы Ли и их представления. — МЦНМО, 2007.
6. Gilmore, Robert. Lie Groups, Lie Algebras, and Some of Their Applications. — A Wiley-interscience publication, 1974
7. Барут А., Рончка Р. Теория представлений групп и ее приложения, т. 1 — М.: Мир, 1980.
8. Хелгасон С. Дифференциальная геометрия, группы Ли и симметрические пространства. — М.: Факториал Пресс, 2005.