

УТВЕРЖДАЮ

Директор Федерального государственного
научного учреждения науки
Институт Теоретической Физики им. Л.Д. Ландау
Сыктывкарского филиала ИТФ РАН
В.В. Лебедев
2015



Отзыв ведущей организации

на диссертацию Сапонова Павла Алексеевича

”Квантовые симметрии фундаментальных физических моделей”,

представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

по специальности 01.04.02 - теоретическая физика

Диссертация Сапонова П.А. посвящена изучению и развитию различных математических аспектов теории квантовых групп и алгебр, появляющихся в описании симметрий интегрируемых моделей двумерной квантовой теории поля с нетривиальной границей.

В квантовых теориях поля с факторизованным рассеянием двухчастичная матрица рассеяния должна удовлетворять так называемому уравнению треугольников. Для интегрируемости теории с границей (существования бесконечного числа коммутирующих интегралов движения в таких теориях) граничная матрица рассеяния также удовлетворяет дополнительному условию, уравнению отражений. Аналогичная картина возникает при описании точно решаемых двумерных решеточных моделей статистической механики, где больцмановские веса модели удовлетворяют уравнению Янга-Бакстера, а также граничному уравнению отражения.

Для описания физических величин, возникающих в таких точно решаемых теориях - корреляционных функций, форм факторов и т.д., в последние десятилетия активно развивался и использовался аппарат квантовых групп, для соответствующих решений уравнений Янга-Бакстера и уравнений отражения. Наиболее известные точно решаемые двумерные модели описываются постоянными и тригонометрическими решениями уравнения Янга-Бакстера (а модели

в решеточной статистической механике - также и эллиптическими решениями). В диссертации рассматривается случай, когда решения не зависят от спектрального параметра (быстроты). В данном простом случае теория (обычных) квантовых групп и их представлений развита наиболее хорошо и полно по сравнению с афинным и эллиптическим случаями. Что касается алгебр уравнений отражения, появляющихся в задачах с интегрируемой границей, то, несмотря на высокий интерес к таким моделям, все еще остается много неисследованных и трудных вопросов, часть из которых и изучается в данной диссертации. Алгебры уравнений отражения находят применение не только в теории квантовых систем с факторизованным рассеянием, но также в активно развивающейся в последние десятилетия некоммутативной геометрии, являющейся одной из перспективных областей, находящихся на стыке современной математики и различных направлений в теоретической физике. Это обеспечивает **высокую актуальность** точным и строгим результатам по широкому классу квантовых алгебр с отражением, представленных в диссертации.

Во **Введении** приведен краткий обзор темы диссертации, дано описание физической мотивации, сформулированы основные результаты, представленные к защите.

В **Первой** главе представлены новые результаты по теории квантовых матричных алгебр для наиболее важного и очень широкого класса суперсимметричных теорий $GL(m|n)$ типа. Получен квантовый аналог тождества Гамильтона-Кэли. Изучены свойства соответствующей коммутативной характеристической подалгебры: построен базис в терминах аналогов функций Шура, для которых найдены правила Литтлвуда-Ричардсона. Изучены соотношения для произведений квантовых функций Шура, с помощью которых введено инвариантное определение спектра квантовой матрицы в $GL(m|n)$ случае.

Вторая глава посвящена развитию теории представлений алгебры уравнения отражений, изучаемой в первой главе. Построена категория векторных пространств, объекты которой представляют собой конечномерные модули над алгеброй уравнения отражений. Найдена явная формула действия генераторов алгебры уравнения отражений в тензорном произведении модулей. Вычислен спектр центральных элементов алгебры в некоторых неприводимых представлениях. Изучена редукция от GL к SL случаю.

Третья глава содержит развитие теории квантовых алгебр уравнения отра-

жений в применении к некоммутативной геометрии. Квантовая алгебра уравнений отражения интерпретируется как двухпараметрическое квантование алгебры функций на матричной алгебре Ли $gl(m)$, отвечающее пучку согласованных скобок Пуассона (линейная скобка Пуассона-Ли и квадратичная скобка Семенова-Тянь-Шанского). Обе эти скобки ограничиваются на орбиты коприсоединенного действия группы $GL(m)$ действующей на пространстве, двойственном к соответствующей алгебре Ли. Изучен вопрос квантования полупростых орбит.

Четвертая глава посвящена применению алгебр отражений к построению квантованных векторных полей и частных производных на алгебре уравнения отражений, трактуемой как алгебра квантовых функций на касательном пространстве к соответствующей алгебре Ли. Рассматривается конструкция инвариантных дифференциальных операторов, ограничение на квантовые орбиты. Развитая конструкция позволяют исследовать аналоги уравнений Шредингера, Клейна-Гордона и Максвелла на некоммутативных пространствах.

В приложениях диссертации собраны некоторые определения, дано изложение вспомогательных вопросов, приведен вывод технических комбинаторных тождеств, необходимых для доказательства утверждений в основном тексте. Имеются также **Заключение** и **Список литературы**.

Оценивая результаты диссертации в целом, хочется заметить, что работы, составившие ее основу (14 публикаций в высокоуровневых российских и международных журналах по математической и теоретической физике, входящих в систему Web of Science), посвящены изучению и технически, и принципиально сложных вопросов. Важно, что вычисления выполнены на высоком техническом уровне, а полученные результаты являются оригинальными, точными и математически строго доказанными. Первоначально, развитие данного направления (и квантовых групп вообще) было мотивировано интересом к детальному изучению алгебр нового типа, описывающих симметрии физически интересных точно решаемых моделей. Для изучения таких симметрий потребовалась разработка и развитие соответствующего нового математического аппарата. Проблемы, имеющие первоначально физическую мотивацию, привели к открытию глубоких новых математических структур и во многом оказались, со временем, на переднем крае развития соответствующих разделов математики - теории представлений, алгебраической геометрии и т.д. Нахождение строго дока-

занных утверждений и получение явных новых формул для широкого класса квантовых алгебр и их представлений, как это было, в частности, сделано в данной работе, является основой и важным шагом для более глубокого понимания математической структуры интегрируемых моделей. Кроме того, применения разработанных формул по алгебрам отражения к развитию некоммутативной геометрии, к изучению уравнений на некоммутативных пространствах выглядят интересными и перспективными. Результаты диссертации докладывались на международных конференциях, на семинарах ИФВЭ, ОИЯИ, ИТФ, университета Валансьена, института Макса Планка. Это подтверждает **научную новизну и актуальность** диссертации. Содержание работ и диссертации отражает **высокую квалификацию** соискателя в развитии математических методов теоретической физики.

Достоверность выводов диссертации следует из строгости и корректности математических доказательств с перекрестными и взаимодополняющими методами расчета.

В качестве замечаний можно отметить следующее.

1. При описании моделей квантовой теории поля с факторизованным рассеянием, возможно, было бы желательно привести ссылки на пионерские работы А.Б. Замолодчикова по интегрируемым теориям поля, уравнениям треугольников, точной солитонной квантовой матрице рассеяния и т.д. Данные работы, хотя и были сделаны до появления теории квантовых групп, во многом сформировали само направление точно решаемых квантовых теорий поля. Кроме того, в тексте встречаются явные формулы для уравнения Янга-Бакстера, R матрицы Джимбо. Однако ссылок на пионерские работы этих авторов нет. Возможно, в объемном диссертационном тексте имеет смысл процитировать работы, которые де-факто опускаются как общеизвестные в небольших по размеру статьях.
2. Термин "фундаментальный" в названии диссертации выглядит не совсем каноническим. По-видимому, более корректнее говорить о том, что речь идет об аналогах (деформациях, версиях на некоммутативном пространстве и т.д.) уравнений Шредингера, и т.д. Ведь нет уверенности, что эти, на самом деле важнейшие, уравнения останутся "фундаментальными" в их некоммутативной версии. В тексте и в автореферате термин разъясня-

ется, конечно.

3. Основу диссертации составляют исследования по алгебрам отражений, которые были мотивированы изучением соответствующих моделей с граничным рассеянием. Получены важные и глубокие математические результаты. Однако в исследовании нет явных применений новых результатов для вычисления физически важных наблюдаемых (корреляционных функций, форм факторов и т.д.) в каких-либо теориях рассеяния с интегрируемой границей, а результатом, по сути, является только изучение алгебры симметрий и дальнейшие применения для моделей, в которых важна некоммутативная геометрия.
4. Обозначения не всегда выбраны наиболее эффективным образом. Например, используются термины A_{n-1} и $sl(m)$, $GL(m)$ и $GL(N)$. Также нижний индекс в R -матрице $R_1, R_q, R_{12}, R_k, R_{m|n}$ имеет разный смысл. При последовательном чтении это не вызывает проблемы, конечно, и не является существенным.

Отмеченные выше незначительные замечания не влияют на положительную оценку работы, а скорее подчеркивают сложность выбранной диссертантом проблемы получения глубоких математически строгих результатов для широкого класса квантовых алгебр, некоммутативной геометрии и их приложений.

Результаты, полученные автором диссертации, могут быть использованы в научных коллективах ведущих российских и зарубежных Институтов по данной тематике (ОИЯИ, ИФВЭ, МИ РАН, ПОМИ РАН, ИТФ РАН, СРТ (Марсель, Франция), Ун-та Мельбурна (Австралия), RIMS (Киото, Япония) и др. Выводы диссертации достаточно обоснованы. Работа отвечает требованиям п. 9. "Положения ВАК о порядке присуждения ученых степеней, предъявляемым к докторским диссертациям", утвержденного Постановлением Правительства РФ от 24.09.2013 № 842, а П.А. Салонов заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.04.02 - теоретическая физика.

Автореферат отвечает содержанию диссертации. Язык и стиль автореферата ясны и в меру лаконичны.

Результаты диссертации обсуждались на заседании Ученого Совета ИТФ

РАН 11.09.2015.

Отзыв составили

Главный научный сотрудник ИТФ РАН
Руководитель сектора Квантовой Теории поля
д.ф.-м.н, 01.04.02 - теоретическая физика,

Белавин Александр Абрамович

Старший научный сотрудник ИТФ РАН
д.ф.-м.н, 01.04.02 - теоретическая физика,

Пугай Ярослав Петрович

ИТФ РАН, Черноголовка, Московская область, просп. Академика Семенова, д.
1-А, 142432, Россия

Телефон: (+7 495) 702-93-17

Факс: (+7 495) 702-93-17

Электронная почта: office@itp.ac.ru

*Подписи Белавина А.А. и Пугая Я.П.
Заверено*

*Ученый секретарь
ИТФ им. Л.Д. Ландау РМ*



Кривошапкин С