

## ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертацию Сапонова Павла Алексеевича “Квантовые симметрии фундаментальных физических моделей”, представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.04.02 — теоретическая физика.

Диссертация Сапонова П.А. посвящена исследованию широкого класса так называемых квантовых матричных алгебр и, в частности, алгебры уравнения отражений. Впервые алгебры уравнения отражений возникли в теории интегрируемых систем, конфигурационное пространство которых содержит границы. В дальнейшем алгебра уравнения отражений нашла важные применения в теории квантовых групп и некоммутативной геометрии. В настоящее время теория квантовых матричных алгебр занимает видное место в аппарате современной теоретической и математической физики, что обеспечивает **высокую актуальность** представленных в диссертации результатов и методов исследования.

**Структура и содержание диссертации.** Диссертация состоит из Введения, четырех глав основного текста, заключения и двух приложений, содержащих технический и справочный материал и списка цитируемых работ. Список литературы содержит 96 наименований. Во введении приведен краткий обзор темы диссертации и ее места в современной теоретической и математической физике, а также сформулированы основные результаты, представленные к защите.

**Первая глава** посвящена структурной теории квантовых матричных алгебр, определяемых  $R$ -матрицами соответствующим суперграфам  $GL(m|n)$ . В первой главе автор доказывает квантовое тождество Гамильтона-Кэли, обобщающее известное тождество классического матричного анализа для матриц с некоммутативными матричными элементами. Для доказательства тождества Гамильтона-Кэли автор в деталях изучает коммутативную характеристическую подалгебру квантовой матричной алгебры. В частности, автором строится ее линейный базис, состоящий из квантовых аналогов симметрических функций Шура. Эти функции параметризуются всевозможными разбиениями натуральных чисел и являются полиномами от генераторов исходной квантовой алгебры. В диссертации показано, что произведения квантовых функций Шура удовлетворяют классическим правилам Литтлвуда-Ричардсона и выведены серии билинейных соотношений на произ-

ведения функций Шура, обобщающие результаты А.Кириллова и Н.Решетихина. Наличие билинейных тождеств позволяет получить факторизованную форму тождества Гамильтона-Кэли и ввести понятие “четных” и “нечетных” собственных значений в случае суперсимметричных квантовых матричных алгебр. Эти собственные значения приводят к удобной параметризации всей характеристической подалгебры и играют важную роль в построении квантовых (супер)многообразий.

Во **второй главе** соискатель строит теорию конечномерных эквивариантных представлений алгебры уравнения отражений, ассоциированную с супергруппой  $GL(m|n)$ . При этом исследовании существенно используется теория представлений алгебры Гекке, являющейся  $q$ -деформацией групповой алгебры симметрической группы. Необходимые данные теории геккевских  $R$ -матриц  $GL(m|n)$  типа (би-ранг, полюса и нули ряда Пуанкаре и т.п.) приводятся в начале второй главы и в Приложении А. Далее автор строит квазитензорную категорию векторных пространств, объекты которой представляют собой конечномерные модули над алгеброй уравнения отражений. Каждый объект в исследуемых категориях параметризуется диаграммой Юнга, а его размерность вычисляется как значение соответствующей функции Шура, при специализации “четных” собственных значений в полюсах ряда Пуанкаре, а “нечетных” собственных значений — в нулях ряда Пуанкаре  $R$ -матрицы, задающей алгебру уравнения отражений.

Автором решается сложная проблема определения структуры представлений на тензорных произведениях модулей над алгеброй уравнения отражения. Эта проблема продиктована сложной процедурой коумножения в алгебре уравнения отражения, что, в свою очередь, является причиной квазитензорного характера категории конечномерных модулей. Соискатель приводит полное решение этой проблемы и выводит явную формулу для матричных элементов алгебры уравнения отражений, действующих в тензорном произведении двух заданных модулей. Для некоторых неприводимых представлений автор вычисляет спектр центральных элементов алгебры, а также разбирает вопрос  $sl$ -редукции, то есть построения представлений фактор-алгебры исходной алгебры уравнения отражений по идеалу, порожденному квантовым следом матрицы генераторов.

В **третьей главе**, пользуясь результатами первых двух глав диссертации, соискатель изучает некоммутативную геометрию, связанную с алгеброй уравнения отражений. Сначала подробно анализируются квазиклассические структуры алгебры уравнения отражений, задаваемой  $R$ -матрицей  $GL(m)$  типа. В этом контексте,

алгебра уравнения отражений трактуется как двухпараметрическое квантование коммутативной алгебры регулярных функций на матричной алгебре  $\text{Mat}_m(\mathbb{C})$ , которая изоморфна алгебре Ли  $gl(m)$ . Одна из используемых скобок Пуассона является обычной линейной скобкой Пуассона-Ли, а вторая скобка есть квадратичная пуассонова структура, введенная М.Семеновым-Тянь-Шанским. Обе скобки рассматриваются при ограничении на орбиты коприсоединенного действия группы  $GL(m)$  на дуальном пространстве  $gl^*(m)$ .

Автор рассматривает квантование полупростых орбит, которые задаются некоторой диагональной матрицей:  $M = \text{diag}[\mu_1, \dots, \mu_m]$ . Вначале соискатель рассматривает случай орбиты общего положения, когда все собственные значения матрицы  $M$  попарно различны. Квантование алгебры функций на этой орбите дается фактор-алгеброй алгебры уравнения отражений по идеалу, порожденному полиномиальными соотношениями на центральные элементы алгебры. Автором далее демонстрируется, что в случае полупростой орбиты не общего положения, структура фактор-алгебры усложняется и идеал, по которому необходимо вычислять фактор-алгебру, содержит матричные элементы минимального полинома квантовой матрицы. Этот полином определяется последовательностью чисел, ассоциированной с каждым кратным собственным значением, которые участвуют в построении полиномиальных соотношений, порождающих соответствующий идеал.

В четвертой главе автор строит и изучает алгебры квантованных векторных полей и частных производных на алгебре уравнения отражений, рассматриваемой как алгебра квантовых функций на дуальном пространстве  $gl^*(m)$ . Ключевыми требованиями данной конструкции является инвариантность алгебры функций относительно (ко)действия  $RTT$  алгебры и плоскость деформации, то есть совпадение размерностей однородных компонент квантовой и классической алгебр функций. Исследуются инвариантные дифференциальные операторы, ограничение всего исчисления на квантованные орбиты, а также вводятся понятия квантового радиуса и радиальной части оператора Лапласа. Эти понятия позволяют соискателю обобщить на некоммутативное пространство некоторые модели теоретической и математической физики, такие как уравнение Шредингера в центральном поле и уравнения Клейна-Гордона и Максвелла для свободного поля.

**Закключение** содержит краткий обзор полученных результатов и обсуждение некоторых перспектив и нерешенных проблем.

**Новизна и достоверность результатов.** Основные результаты диссертационной работы содержатся в 14 публикациях в российских и зарубежных журналах. Все журналы входят в список ВАК и являются реферируемыми изданиями высокого научного уровня. Кроме того, результаты диссертации неоднократно докладывались на международных семинарах серии “Классические и квантовые интегрируемые системы”, на заседаниях научных семинаров отдела теоретической физики ИФВЭ (Протвино), лаборатории теоретической физики ОИЯИ (Дубна), лаборатории математики университета Валансьена (Франция), математическом институте общества им. Макса Планка (Бонн) и других местах. Это подтверждает высокое качество, достоверность и новизну полученных соискателем результатов.

**Общая оценка работы и замечания.** Представленная диссертация написана достаточно подробно, изложение последовательное и полное. Все результаты получены автором лично, либо при его решающем участии. Их достоверность и научный уровень сомнений не вызывают. В качестве замечаний можно отметить следующее:


1. Доказательства некоторых результатов написаны слишком кратко или вообще заменены ссылками на соответствующую журнальную работу автора. В тексте диссертации есть утверждения для объектов (не определенных в основном тексте) со ссылками или даже без ссылок на их определения. Например, Утверждение 29 формулирует свойства матриц  $B$  и  $C$ , которые не определены в основном тексте. Их определение присутствует в Приложении А, но в основном тексте про это ничего не сказано.
2. Иногда автор при выводе некоторых соотношений использует крайне громоздкие обозначения, затрудняющие понимание происходящих преобразований. Так происходит, например, при выводе квантового аналога тождества Гамильтона-Кэли или для билинейных соотношений на функции Шура.

Отмеченные выше недостатки не влияют на качество представленных результатов и не снижают общий научный уровень диссертации. Автореферат диссертации адекватно и достаточно полно отражает ее содержание. Тема диссертации соответствует научной специальности 01.04.02 — теоретическая физика.

Считаю, что диссертационная работа Сапонова П.А. “Квантовые симметрии фундаментальных физических моделей” отвечает всем требованиям, предъявля-

емым ВАК РФ к диссертациям на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.04.02 - теоретическая физика, а её автор заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.04.02 - теоретическая физика.

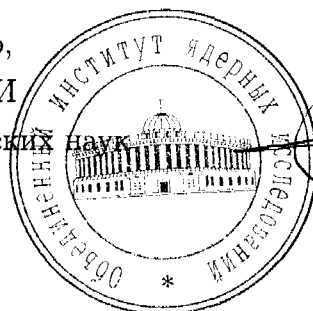
Ведущий научный сотрудник ЛТФ ОИЯИ  
доктор физико-математических наук  
(01.04.02 – теоретическая физика)



С.З.Пакуляк

02 сентября 2015 года

Подпись С.З.Пакуляк заверяю,  
Ученый секретарь ЛТФ ОИЯИ  
кандидат физико-математических наук



С.Н.Неделько