Национальный исследовательский центр “Курчатовский институт”
Федеральное государственное бюджетное учреждение
Государственный научный центр Российской Федерации
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

На правах рукописи

Сапонов Павел Алексеевич

КВАНТОВЫЕ СИММЕТРИИ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ФИЗИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

01.04.02 — Теоретическая физика

Диссертация на соискание ученой степени доктора
физико-математических наук

Научный консультант
доктор физико-математических наук
Александр Витальевич Разумов

Протвино — 2015

Содержание

Введение

Первые примеры квантовых матричных алгебр возникли в основополагающих работах В. Дринфельда [9] и Н. Решетихина, Л. Тахтаджяна и Л. Фаддеева [83], где рассматривались алгебры квантовых функций на группах (в дальнейшем кратко именуемые RTT алгебрами). Вскоре после этого был введен в рассмотрение другой важный класс квантовых матричных алгебр (см., например, [57, 56]) — так называемые алгебры уравнения отражения (кратко, RE алгебры или REA от английского термина "reflection equation algebra"). Общее определение квантовой матричной алгебры возникло при попытке дать RTT и RE алгебрам единое описание [42]. На первый взгляд такая идея не кажется естественной, поскольку теории представлений RTT и RE алгебр существенно различны. Однако, проведенные независимо исследования RTT [20, 98, 47] и RE алгебр [71, 79, 32] обнаружили замечательное сходство структуры этих алгебр и классической матричной алгебры. Как выяснилось, и для RE, и для RTT алгебр можно сформулировать некоммутативное обобщение теоремы Кэли-Гамильтона. Кроме того, в обоих случаях оказалось возможным определить понятие спектра для некоммутативной матрицы генераторов алгебры. На основе этих наблюдений определение квантовой матричной алгебры независимым образом воспроизводилось в работе [45]. Там же некоммутативная версия теоремы Кэли-Гамильтона была доказана для общих алгебр $GL(m)$ типа (см. [44, 45, 46]).

Опыт исследования квантовых матричных алгебр $GL(m)$ типа явился хорошей основой для дальнейших построений. В исследовании других серий квантовых матричных алгебр можно выделить два направления — исследование семейств алгебр Геккевского типа и семейств алгебр типа Бирман-Мураками-Венцля (кратко БМВ алгебр). Отличие этих семейств заключается в том, что при построении квантовой матричной алгебры используются R-матричные представления различных фактор-алгебр групповой алгебры группы кос (соответственно, алгебры Гекке или алгебры Бирман-Мураками-Венцля).

Семейство алгебр БМВ типа содержит серии ортогональных и симплектических квантовых матричных алгебр и их суперсимметричные обобщения. Изучение БМВ случая начато в работе [74], где доказывается тождество Кэли-Гамильтона и определяется спектр квантовых матриц для алгебр ортогональной и симплектической серий.

Семейство алгебр Геккевского типа включает общие линейные алгебры а также их суперсимметричные аналоги — квантовые матричные алгебры $GL(m|n)$ типа. Серия алгебр $GL(m|n)$ типа рассматривались в статье [33], где, помимо определения, было доказана теорема Кэли-Гамильтона для данной серии. Работа [33] обобщает, с одной стороны, результаты И. Кантора и И. Тришина [59, 60] по характеристическим тождествам для классических суперматриц (инвариантное тождество Кэли-Гамильтона по терминологии авторов), с другой стороны, исследования Г. Грина и П. Джарвиса [50], по характеристическим тождествам для линейных супералгебр Ли.

Диссертация посвящена исследованию свойств специального класса квантовых матричных алгебр — алгебр уравнения отражений, задаваемых R-матрицами $GL(m|n)$ типа. Своим происхождением алгебра уравнения отражений обязана теории интегрируемых систем с границей. Она получила свое название от уравнения, описывающего факторизованное рассеяние частиц на полупрямой (см. работу [6], в которой впервые появилось уравнение отражений, зависящее от спектрального параметра).

Согласно опеределению (см. [57]), алгеброй уравнения отражений называется ассоциативная алгебра с единицей над полем[1] $\mathbb{K}$, порожденная элементами l_i^j, $1 \le i, j \le N$, которые подчиняются следующим квадратичным перестановочным соотношениям

$$R_{12}L_1R_{12}L_1 = L_1R_{12}L_1R_{12}.$$

Здесь $L_1 = L \otimes I$, где $L = \|l_i^j\|$ является матрицей, составленной из генераторов алгебры уравнения отражений. Линейный оператор $R : V^{\otimes 2} \to V^{\otimes 2}$ представляет собой обратимое решение квантового уравнения Янга-Бакстера (твист)

$$R_{12}R_{23}R_{12} = R_{23}R_{12}R_{23}\,,$$

где V есть конечномерное векторное пространство над полем $\mathbb{K}$, $\dim_{\mathbb{K}} V = N$. Индексы оператора R нумеруют пространство (или пространства), в которых данный оператор нетривиально действует. Например, R_{12} и R_{23} в вышеприведенном равестве обозначают такие операторы в тензорной степени $V^{\otimes 3}$: $R_{12} = R \otimes I$, $R_{23} = I \otimes R$.

В настоящее время известны различные модификации алгебры уравнения отражений (см. [57]), имеющие приложения в математической физике и некоммутативной геометрии. Алгебра уравнения отражений, связанная с квантовой группой

[1] В основном мы будем работать с полем комплексных чисел $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, но некоторые результаты справедливы и в случае вещественного поля $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

$U_q(sl(m))$, возникает, например, при построении q-аналога дифференциального исчисления на группах $GL(m)$ и $SL(m)$ (см. [22]). В этой конструкции она трактуется как алгебра конечных сдвигов, порожденных q-аналогами экспоненцированных левоинвариантных векторных полей на соответствующей группе.

В примере, связанном с квантовой группой $U_q(\mathfrak{g})$, где $\mathfrak{g}$ есть алгебра Ли некоторой классической группы Ли G, надлежащий фактор алгебры уравнения отражений играет роль деформации (квантования) координатного кольца $\mathbb{K}[G]$. Соответствующая скобка Пуассона была введена М. Семеновым-Тянь-Шанским[2].

Нас будут интересовать решения уравнения Янга-Бакстера, удовлетворяющие дополнительному соотношению

$$(R - q\,I)(R + q^{-1}\,I) = 0\,,$$

где ненулевой числовой параметр $q \in \mathbb{K}$ предполагается фиксированным в *общем положении*. По определению, это означает, что значение q не принадлежит счетному множеству *нетривиальных* корней из единицы, то есть $q^k \neq 1$, $k \in \mathbb{N}$, но значение $q = 1$ не запрещено. Как следствие этого выбора, q-аналоги всех натуральных чисел отличны от нуля

$$k_q := \frac{q^k - q^{-k}}{q - q^{-1}} \neq 0, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}\,.$$

В дальнейшем любая R-матрица, удовлетворяющая вышеприведенному условию, будет называться Геккевской R-матрицей (Геккевским твистом).

Особый интерес для нас будут представлять семейства Геккевских R-матриц R_q, аналитически зависящих от параметра q в некоторой окрестности единицы числового поля $1 \in \mathbb{K}$, и таких, что при $q = 1$ соответствующая R-матрица $R = R_1$ является инволютивным оператором $R^2 = I$.

Хорошо известный пример такого семейства дается R-матрицей Дринфельда-Джимбо, возникающей из квантовой группы $U_q(sl(m))$

$$R_q = q\sum_{i=1}^{m} h_i^i \otimes h_i^i + \sum_{i \neq j}^{m} h_i^j \otimes h_j^i + (q - q^{-1})\sum_{i<j}^{m} h_i^i \otimes h_j^j, \tag{0.1}$$

[2]Заметим, что в алгебре функций любой классической группы Ли G существует другая скобка Пуассона, открытая Е. Скляниным. Квантование алгебры функций с этой скобкой дает фактор-алгебру алгебры RTT (см. [83]). Эти два квантовых аналога пространства $\mathbb{K}[G]$ связаны друг с другом преобразованием (“процедурой трансмутации”), введенным Ш. Маджидом (см. монографию [64] и содержащиеся там ссылки).

где элементы h_i^j образуют естественный базис пространства эндоморфизмов $\mathrm{End}\,(V)$

$$h_i^j(x_k) = \delta_k^j\, x_i\,,$$

соответствующий данному базису $\{x_k\}$ пространства V. Заметим, что при $q = 1$ приведенный выше твист R_q переходит в обычную перестановку P.

Проиллюстрируем основные свойства алгебры уравнения отражений на примере алгебры, отвечающей $U_q(sl(m))$ R-матрице Дринфельда-Джимбо (0.1). У этой алгебры имеются некоторые очень важные свойства, отличающие ее от алгебр, связанных с другими квантовыми группами $U_q(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{g} \neq sl(m)$.

Прежде всего, рассматриваемая алгебра представляет собой q-деформацию коммутативной алгебры $\mathrm{Sym}\,(gl(m)) = \mathbb{K}[gl(m)^*]$. Во-вторых, выполняя линейный сдвиг на единицу (пропорциональный новому параметру $\hbar$) некоторых генераторов алгебры уравнения отражений, мы приходим к квадратично-линейным соотношениям для сдвинутого набора генераторов. Поэтому в таком базисе алгебра уравнения отражений может трактоваться как "двойная деформация" исходной коммутативной алгебры $\mathbb{K}[gl(m)^*]$, параметризуемая q и $\hbar$. Эту форму мы будем называть модифицированной алгеброй уравнения отражений и обозначать $\mathcal{L}(R_q, \hbar)$. Полагая параметр сдвига $\hbar = 0$, мы возвращаемся к немодифицированной алгебре уравнения отражений $\mathcal{L}(R_q)$.

Фиксация параметра $q = 1$ переводит алгебру $\mathcal{L}(R_q, \hbar)$ в универсальную обертывающую алгебру $U(gl(m)_\hbar)$, где обозначение $\mathfrak{g}_\hbar$ отражает замену скобки Ли $[\,,\,]$ алгебры $\mathfrak{g}$ на скобку $\hbar[\,,\,]$. Исходная коммутативная алгебра $\mathbb{K}[gl(m)^*]$ получается при двойной специализации параметров алгебры $\mathcal{L}(R_q, \hbar)$ в точках $\hbar = 0$ и $q = 1$.

Алгебра $\mathcal{L}(R_q, \hbar)$ (как и $\mathcal{L}(R_q)$) может быть превращена в модуль над $U_q(sl(m))$. При этом алгебраическая структура $\mathcal{L}(R_q, \hbar)$ оказывается $U_q(sl(m))$-эквивариантной (ковариантной). Это означает, что действие квантовой группы перестановочно с умножением в алгебре уравнения отражений

$$M(x \cdot y) = M_{(1)}(x) \cdot M_{(2)}(y)\,, \quad \forall\, M \in U_q(sl(m))\,, \quad \forall\, x, y \in \mathcal{L}(R_q, \hbar),$$

где мы воспользовались обозначениями Свидлера для коумножения в квантовой группе: $\Delta(M) = M_{(1)} \otimes M_{(2)}$.

В квазиклассическом пределе упомянутая выше двойная деформация алгебры $\mathbb{K}[gl(m)^*]$ порождает пучок скобок Пуассона следующего вида

$$\{\,,\,\}_{PL,r} = a\,\{\,,\,\}_{PL} + b\,\{\,,\,\}_r\,, \quad a, b \in \mathbb{K}, \tag{0.2}$$

где $\{\, ,\}_{PL}$ является линейной скобкой Пуассона-Ли, определяемой алгеброй $gl(m)$, а $\{\, ,\}_r$ представляет собой естественное расширение скобки Семенова-Тянь-Шанского на линейное пространство $gl(m)^*$.

Пуассоновы структуры (0.2) детально рассматриваются в разделе диссертации, посвященном квантовым многообразиям и построению "квантовых орбит" $\mathcal{O} \subset gl(m)^*$. Общий метод построения подобных квантовых орбит мы иллюстрируем на примере двумерной сферы. В отличие от других определений квантовых однородных пространств, в нашем подходе квантовые орбиты задаются как некоторые факторы алгебры $\mathcal{L}(R_q, \hbar)$ и по своим свойствам во многом аналогичны так называемой "псевдо"-сфере — квантовому многообразию, отвечающему квантованию скобки Пуассона-Ли ($a = 1$, $b = 0$ в пучке (0.2)):

$$\mathcal{SL}^c(\hbar) = U(su(2)_\hbar)/\langle C - c\rangle,$$

где C есть квадратичный элемент Казимира обертывающей алгебры $U(su(2)_\hbar)$. Например, как хорошо известно из теории представлений, существует дискретный набор значений $c_k \in \mathbb{K}$ параметра c, такой, что любая из алгебр $\mathcal{SL}^{c_k}(\hbar)$ имеет конечномерное представление в линейном пространстве V_k, а отображение $\mathcal{SL}^{c_k}(\hbar) \to \mathrm{End}\,(V_k)$ является $su(2)$-морфизмом. Аналогичное свойство имеется и у упомянутых выше фактор-алгебр алгебры $\mathcal{L}(R_q, \hbar)$, с тем отличием, что соответствующие пространства V_k являются объектами *квазитензорной* категории. В квазитензорных категориях объекты характеризуются их квантовой размерностью, которая определяется через категорный (квантовый) след. Необходимость деформации обычного следа является одной из основных особенностей предлагаемого подхода к описанию квантовых однородных пространств.

В общих чертах, основные направления исследований, представленные в диссертации, можно описать следующим образом. В первом разделе изучается структура квантовых матричных алгебр $GL(m|n)$ типа. Главный результат этих исследований заключается в построении матричного тождества Гамильтона-Кэли для квантовой матрицы и запись его в факторизованной форме. Это позволяет ввести инвариантное определение спектра квантовой матрицы и выразить в терминах спектральных значений линейный базис характеристической подалгебры — квантовые функции Шура, а также следы степеней квантовой матрицы. Эти выражения играют ключевую роль в последующем определении квантовых орбит.

Второй раздел посвящен теории представлений алгебры уравнения отражений. Особенностью этой алгебры является тот факт, что категория ее конечномерных модулей является *квазитензорной*, в отличие от, например, категории конечномерных модулей над универсальной обертывающей $U(gl(m))$.

Структура алгебры уравнения отражений полностью определяется конкретной Геккевской R-матрицей, поэтому естественно начать с классификации всех кособратимых (подробности см. Приложение A) Геккевских R-матриц $R : V^{\otimes 2} \to V^{\otimes 2}$. Ключевой объект в решении этой проблемы — ряд Гильберта-Пуанкаре $P_-(t)$, отвечающий так называемой "R-внешней алгебре" пространства V. Хотя исчерпывающая классификация всех возможных форм этого ряда пока не построена, тем не менее, известно, что ряд Гильберта-Пуанкаре $P_-(t)$ любой Геккевской R-матрицы представляет собой рациональную функцию[3] [77, 19]. Упорядоченную пару целых чисел $(m|n)$, где m (соответственно n) есть степень полинома $N(t)$ в числителе $P_-(t)$ (соответственно полинома $D(t)$ в знаменателе $P_-(t)$), мы будем называть *би-рангом* матрицы R

Построение категории конечномерных представлений алгебры уравнения отражений (данная категория будет в дальнейшем называться категорией Шура-Вейля $\mathrm{SW}(V_{(m|n)})$, где пара $(m|n)$ соответствует би-рангу R-матрицы) является центральной проблемой, рассматриваемой во втором разделе диссертации. Объектами этой категории служат прямые суммы векторных пространств $V_\lambda \otimes V_\mu^*$. Здесь V есть исходное (базисное) векторное пространство, связанное с кособратимой Геккевской R-матрицей, V^* — пространство дуальное к V, символы λ и μ обозначают произвольные разбиения (диаграммы Юнга) натуральных чисел. Отображение $V \to V_\lambda$ представляет собой функтор Шура, отвечающий матрице R (его классическая версия обсуждается в работе [21]). Отображение $V^* \to V_\mu^*$ определяется аналогично. Отметим, что моноидальная квазитензорная жесткая категория $\mathrm{SW}(V_{(m|n)})$ (см. определение в [7]) не является абелевой.

Мы вычисляем некоторые числовые характеристики объектов категории Шура-Вейля, в частности, их размерности (как классические, так и квантовые). Классические размерности существенно зависят от конкретной формы Геккевской R-матрицы и являются функциями от корней полиномов $N(t)$ и $D(t)$, определенных

[3] Если ряд $P_-(t)$ является полиномом, мы будем называть соответствующую R-матрицу *четной*. Этот полином может отличаться от классического полинома $(1+t)^n$, $n = \dim V$, отвечающего случаю, когда R совпадает с обычной перестановкой. Например, в работе [23] классифицированы все кособратимые Геккевские R-матрицы с рядом $P_-(t) = 1 + nt + t^2$. Кроме того, в этой работе предложен метод "склеивания" таких R-матриц, который дает возможность строить кособратимые Геккевские R-матрицы с другими нестандартными рядами Гильберта-Пуанкаре.

выше. Квантовые же размерности зависят только от значения би-ранга $(m|n)$. В некотором смысле, категория $\mathrm{SW}(V_{(m|n)})$ похожа на тензорную категорию конечномерных $U(gl(m|n))$-модулей.

Третья проблема, решению которой посвящен второй раздел, заключается в построении теории представлений алгебры модифицированного уравнения отражений $\mathcal{L}(R_q,\hbar)$ в категории $\mathrm{SW}(V_{(m|n)})$. Поскольку для $q \neq 1$ алгебры $\mathcal{L}(R_q,\hbar)$ и $\mathcal{L}(R_q)$ изоморфны (фактически, мы имеем одну и ту же алгебру, записанную в двух различных наборах базисных генераторов), мы автоматически получаем теорию представлений алгебры уравнения отражений[4] $\mathcal{L}(R_q)$.

Отметим, что некоторые типы представлений алгебры уравнения отражений уже изучены, главным образом для случая четных R-матриц (би-ранг $(m|0)$) [51, 67, 39, 84]. В отличие от процитированных работ, в диссертации рассматривается модифицированная алгебра уравнения отражений $\mathcal{L}(R_q,\hbar)$, ассоциированная с кособратимой Геккевской R-матрицей общего вида (то есть, имеющей би-ранг $(m|n)$). Во втором разделе определяется действие алгебры $\mathcal{L}(R_q,\hbar)$ на объектах категории $\mathrm{SW}(V_{(m|n)})$ таким образом, что соответствующие представления оказываются эквивариантными.

В частности, разбирается важный пример "присоединенного" представления ρ_{ad} алгебры $\mathcal{L}(R_q,\hbar)$ в линейной оболочке ее генераторов. В случае, когда Геккевская R-матрица совпадает с супер-перестановкой в Z_2-градуированном линейном пространстве V

$$R:\ V^{\otimes 2} \to V^{\otimes 2}\,, \qquad R(x\otimes y) = (-1)^{\overline{x}\,\overline{y}}y\otimes x\,,$$

где x и y есть произвольные однородные элементы пространства V и символ $\bar{z}$ обозначает четность (градуировку) однородного элемента z, модифицированная алгебра уравнения отражений совпадает с универсальной обертывающей алгеброй $U(gl(m|n))$. При этом представление ρ_{ad} становится тождественно обычному присоединенному представлению. Этот факт является одной из причин, по которой алгебра $\mathcal{L}(R_q,\hbar)$ рассматривается в качестве подходящего аналога обертывающей алгебры. Более того, в случае инволютивной R-матрицы Гекке, соответствующая модифицированная алгебра уравнения отражений превращается в обертывающую алгебру обобщенной алгебры Ли $\mathrm{End}\,(V)$. Подобные обобщенные алгебры были

[4]В точке $q = 1$ изоморфизм $\mathcal{L}(R_q,\hbar) \cong \mathcal{L}(R_q)$ разрушается, поэтому мы предпочитаем рассматривать алгебры $\mathcal{L}(R_q,\hbar)$ и $\mathcal{L}(R_q)$ отдельно и использовать для них различные наименования.

введены в работе [24], хорошо известным примером обобщенной алгебры Ли является супер-алгебра Ли.

Другим свойством, указывающим на сходство модифицированной алгебры уравнения отражений и обертывающей алгебры обобщенной алгебры Ли, является структура твистованной биалгебры. Данная структура определяется коумножением Δ и коединицей ε. Действие коумножения на генераторах l_i^j модифицированной алгебры уравнения отражений можно описать следующим правилом

$$\Delta(L) = L \otimes 1 + 1 \otimes L - (q - q^{-1}) L \otimes L \,, \qquad L = \|l_i^j\|.$$

При $q = 1$ приведенное выше коумножение совпадает с коумножением на генераторах универсальной обертывающей алгебры (обобщенной) алгебры Ли. Заметим, что хотя мы и не определяем отображение антипода в алгебре $\mathcal{L}(R_q, \hbar)$, категория $\mathrm{SW}(V_{(m|n)})$ ее представлений оказывается замкнутой.

В дополнение к структуре $\mathcal{L}(R_q, \hbar)$-модуля, на объектах категории Шура-Вейля, отвечающей стандартной Геккевской R-матрице (0.1), можно определить действие квантовой группы $U_q(sl(m))$. Кроме того, q-аналоги супер-групп (см. [58]) также могут быть представлены в соответствующей категории Шура-Вейля[5]. Однако для кособратимой Геккевской R-матрицы общего вида алгебра квантовогруппового типа отсутствует, тогда как (модифицированная) алгебра уравнения отражений может быть введена для любой такой R-матрицы.

Алгебра модифицированного уравнения отражений обладает еще одним преимуществом по сравнению с квантовой группой и ее супер-аналогами. Она более удобна для явного построения проективных модулей над квантовыми орбитами, возникающими в рамках метода, предложенного в работах [39, 41].Рассмотрению этих вопросов посвящен третий раздел диссертации. В нем разбирается метод построения квантовых многообразий и квантовых линейных расслоений на них.

Четвертый раздел диссертации посвящен построению некоммутативного дифференциального исчисления на алгебре уравнения отражений и на ее фактор-алгебрах — квантованных орбитах коприсоединенного действия группы Ли $GL(m)$ на пространстве $gl(m)^*$ — дуальном к соответствующей алгебре Ли $gl(m)$. В частности, вводятся понятия некоммутативных частных производных, и инвариантных дифференциальных операторов старших порядков. На этой основе можно вводить аналоги уравнений некоторых фундаментальных физических моделей (типа

[5]В работе [99] предложен другой путь построения представлений q-деформированных алгебр $U(gl(m|n))$, основанный на треугольном разложении.

уравнения Шредингера или Клейна-Гордона) в некоммутативном пространстве и исседовать их решения.

1 Структура алгебры

В данном разделе приводится определение квантовой матричной алгебры (и алгебры уравнения отражений как частного случая), рассматриваются свойства максимальной коммутативной подалгебры и ее линейного базиса — квантовых симметрических функций (функций Шура), а также вводится тождество Гамильтона-Кэли для квантовых матриц и опрелеляется их спектр. Кроме того, приводится параметризация квантовых функций Шура в терминах собственных значений квантовых матриц. Вспомогательные определения и свойства так называемых гекковских R-матриц $GL(m|n)$ типа собраны в Приложении A.

1.1 Квантовая матричная алгебра: определение и примеры

Пусть V конечномерное линейное пространство над полем комплексных чисел, $\dim V = N$. Любому элементу $X \in \mathrm{End}(V^{\otimes p})$, $p = 1, 2, \dots$, сопоставим последовательность эндоморфизмов $X_i \in \mathrm{End}(V^{\otimes k})$, $k = p, p+1, \dots$, по правилу

$$X_i = \mathrm{Id}_V^{i-1} \otimes X \otimes \mathrm{Id}_V^{k-p-i+1}, \quad 1 \le i \le k-p+1, \tag{1.1}$$

где Id_V — тождественный автоморфизм пространства V.

Рассмотрим линейное пространство $\mathrm{Mat}_N(W)$ и зададим серию отображений линейных пространств $\mathrm{Mat}_N(W)^{\otimes k} \to \mathrm{Mat}_N(W)^{\otimes(k+1)}$, $k \ge 1$, следующими рекуррентными соотношениями

$$M_{\overline{1}} := M, \quad M_{\overline{k}} \mapsto M_{\overline{k+1}} := F_k M_{\overline{k}} F_k^{-1}, \quad M_{\overline{k}} \in \mathrm{Mat}_N(W)^{\otimes k}, \tag{1.2}$$

где M — некоторый элемент пространства $\mathrm{Mat}_N(W)$, F — фиксированный элемент из $\mathrm{Aut}(V \otimes V)$.

Выберем в качестве W ассоциативную алгебру $\mathcal{A}$ над $\mathbb{C}$, свободно порожденную единичным элементом и N^2 генераторами M_i^j

$$\mathcal{A} = \mathbb{C}\langle M_i^j \rangle \quad 1 \le i, j \le N.$$

Определение 1 *Пусть $\{R, F\}$ — совместимая пара строго кософбратимых R-матриц (см. Приложение A), причем R-матрица $R_f = F^{-1}R^{-1}F$ кософбратима.*

Квантовой матричной алгеброй $\mathcal{M}(R,F)$ назовем фактор алгебры $\mathcal{A}$ по двустороннему идеалу, порожденному матричными элементами соотношения

$$R_1 M_{\overline{1}} M_{\overline{2}} - M_{\overline{1}} M_{\overline{2}} R_1 = 0, \tag{1.3}$$

где $M = \|M_i^j\| \in \mathrm{Mat}_N(\mathcal{A})$ и элементы $M_{\overline{k}}$ строятся в соответствии с (1.2) по R-матрице F.

Замечание 2 Приведенное определение квантовой матричной алгебры отличается от данного в работе [45], однако при сделанных предположениях о свойствах R и F оба определения эквивалентны. Как показано в [46], матрица $\widetilde{M} = (D^F)^{-1} M D^R$ удовлетворяет соотношениям, накладываемым на генераторы квантовой матричной алгебры в [45].

Лемма 3 *Матрица M генераторов квантовой матричной алгебры $\mathcal{M}(R,F)$ удовлетворяет соотношениям*

$$R_k\, M_{\overline{k}}\, M_{\overline{k+1}} = M_{\overline{k}}\, M_{\overline{k+1}}\, R_k, \tag{1.4}$$

где элементы $M_{\overline{k}}$, $M_{\overline{k+1}}$ задаются формулами (1.2) по R-матрице F.

Доказательство леммы изложено в работе [45].

Приведем несколько примеров наиболее широко известных квантовых матричных алгебр. Пусть $P : V^{\otimes 2} \to V^{\otimes 2}$ — оператор перестановки

$$P(v_1 \otimes v_2) = v_2 \otimes v_1,$$

а R-матрица R строго кособратима. Пара $\{R, P\}$ является совместимой и определяет квантовую матричную алгебру $\mathcal{M}(R,P)$. Обозначим матрицу ее генераторов буквой T. В данном случае $T_{\overline{k}} = T_k$ (см. определения (1.1) и (1.2)), и перестановочные соотношения (1.3) имеют вид

$$R_1 T_1 T_2 - T_1 T_2 R_1 = 0. \tag{1.5}$$

Предположим дополнительно, что R есть R-матрица $GL(m)$ типа. Стандартный пример такой R-матрицы — R-матрица Дринфельда-Джимбо, получаемая квантованием классических групп серии A_m. При $m = N$ (напомним, что $N = \dim V$) соответствующая алгебра $\mathcal{M}(R,P)$ является квантованием алгебры функций на линейной группе — $\mathrm{Fun}_q(GL(N))$ (см. [83]). Однако, вообще говоря, параметры m

и N не обязаны совпадать. Примеры $N^2 \times N^2$ R-матриц $GL(m)$ типа, таких что $m \neq N$, построены в работе [23].

Рассмотрим другой пример совместимой пары: $\{R, R\}$, где R — строго кососбратимая R-матрица. Перестановочные соотношения (1.3) для квантовой матричной алгебры $\mathcal{M}(R, R)$ имеют вид

$$R_1 M_1 R_1 M_1 - M_1 R_1 M_1 R_1 = 0, \tag{1.6}$$

где $M_1 = M \otimes \mathrm{Id}_V$, а $M = \|M_i^j\|$ есть матрица генераторов алгебры. Данная алгебра называется алгеброй уравнения отражения [56]. Впервые возникнув в теории интегрируемых систем с границей, она затем нашла применение в дифференциальной геометрии квантовых групп (см., например, [48, 22, 38, 40]). Степень квантовой матрицы в данном случае совпадает с обычной матричной степенью $M^{\overline{k}} = M^k$.

В предположении, что R – геккевская R-матрица, совершим в $\mathcal{M}(R, R)$ линейную замену генераторов

$$M \mapsto L = M + \frac{\hbar}{q - q^{-1}} \mathrm{Id}_V,$$

где $\hbar$ ненулевой числовой параметр. При этом соотношения (1.6) преобразуются к квадратично-линейному виду

$$R_1 L_1 R_1 L_1 - L_1 R_1 L_1 R_1 = \hbar (R_1 L_1 - L_1 R_1). \tag{1.7}$$

Такой базис генераторов применяется при построении квантовых аналогов орбит коприсоединенного действия групп Ли. Соответствующую квантовую матричную алгебру будем называть модифицированной алгеброй уравнения отражений и обозначать символом $\mathcal{L}(R_q, \hbar)$. Эта алгебра является основным объектом, изучаемым в данной диссертации. Заметим, что при $q \neq 1$, алгебра $\mathcal{L}(R_q, \hbar)$ очевидно изоморфна алгебре уравнения отражений, порождаемой генераторами (1.6).

Пусть $P_{m|n}$ — оператор перестановки на суперпространстве $(m|n)$ типа

$$P_{m|n}(v_1 \otimes v_2) = (-1)^{|v_1||v_2|} v_2 \otimes v_1, \tag{1.8}$$

где v_i есть однородные элементы суперпространства и $|v_i|$ — соответствующая им градуировка. Случай алгебры $\mathcal{M}(R, R)$ с $R = P_{m|n}$ был рассмотрен в работах [59, 60]. Заметим, что матричная супералгебра $\mathcal{M}(P_{m|n}, P_{m|n})$ является предельным случаем при $q \to 1$ квантовой матричной алгебры $\mathcal{M}(R_{m|n}, R_{m|n})$ (1.6), где $R_{m|n}$ есть R-матрица Дринфельда-Джимбо, получаемая при квантовании классической супергруппы $GL(m|n)$ (явный вид этой R-матрицы приведен в работах [17, 43]). При этом так называемое инвариантное тождество Гамильтона-Кэли, найденное в работах [59, 60], является предельным случаем приведенного ниже тождества Гамильтона-Кэли для квантовых матричных алгебр $GL(m|n)$ типа.

1.2 Характеристическая подалгебра и функции Шура

Далее в этой главе мы рассматриваем квантовые матричные алгебры $\mathcal{M}(R,F)$, задаваемые с помощью геккевской R-матрицы R (см. Приложение A, условие (A.23)). Мы называем их матричными алгебрами *геккевского типа.*

Рассмотрим подпространство $\mathrm{Char}(R,F) \subset \mathcal{M}(R,F)$, являющееся линейной оболочкой единицы и элементов вида

$$y(x^{(k)}) = \mathrm{Tr}_{R(1\dots k)}(M_{\overline{1}}\dots M_{\overline{k}}\,\rho_R(x^{(k)})) \quad k = 1, 2, \dots, \tag{1.9}$$

где $x^{(k)}$ — всевозможные элементы алгебры $\mathcal{H}_k(q)$. Символом $\mathrm{Tr}_{R(1\dots k)}$ здесь обозначена операция взятия R-следа по пространствам с первого по k-е.

Утверждение 4 *Пусть $\mathcal{M}(R,F)$ – квантовая матричная алгебра геккевского типа. Пространство $\mathrm{Char}(R,F)$ является коммутативной подалгеброй алгебры $\mathcal{M}(R,F)$. Эту подалгебру мы будем называть характеристической.*

Доказательство этого утверждения приводится в работе [45] и основано, в частности, на следующем техническом результате.

Лемма 5 *Рассмотрим произвольный элемент $x^{(k)}$ алгебры $\mathcal{H}_k(q)$. Символом $x^{(k)\uparrow i}$ обозначим элемент алгебры $\mathcal{H}_{k+i}(q)$, являющийся образом $x^{(k)}$ при вложении алгебры $\mathcal{H}_k(q) \hookrightarrow \mathcal{H}_{k+i}(q)$, задаваемом формулами (A.20). Пусть $\{R,F\}$ — совместимая пара R-матриц, причем геккевская R-матрица R кососбратима. Тогда выполняются соотношения*

$$\mathrm{Tr}_{R(i+1,\dots,i+k)}(M_{\overline{i+1}}\dots M_{\overline{i+k}}\;\rho_R(x^{(k)\uparrow i})) \;=\; \mathrm{Id}_{V^{\otimes i}}\; y(x^{(k)}). \tag{1.10}$$

Формула (1.10) нами будет неоднократно использована в дальнейшем. Она следует непосредственно из свойства (A.35) совместимых пар $\{R,F\}$, и ее доказательство также приведено в работе [45].

Введем в рассмотрение два набора элементов характеристической подалгебры: $\{p_k(M)\}$ и $\{s_\lambda(M)\}$, элементы которых будем называть, соответственно, *степенными суммами* и *функциями Шура*. Для каждого целого $k \geq 1$ обозначим

$$p_k(M) := \mathrm{Tr}_{R(1\dots k)}(M_{\overline{1}} \dots M_{\overline{k}} R_{k-1} \dots R_1). \tag{1.11}$$

В случае, если R — R-матрица геккевского типа, для всякого разбиения $\lambda \vdash k$, $k = 1, 2, \dots$, обозначим

$$s_0(M) := 1, \quad s_\lambda(M) := \mathrm{Tr}_{R(1\dots k)}(M_{\overline{1}} \dots M_{\overline{k}} \, \rho_R(E^\lambda_\alpha)). \tag{1.12}$$

Выражение в правой части (1.12) не зависит от выбора индекса α матричной единицы. Действительно, в силу соотношений (1.4), для всякого $x^{(k)} \in \mathcal{H}_k(q)$ матрицы $\rho_R(x^{(k)})$ и $(M_{\overline{1}} \dots M_{\overline{k}})$ в формуле (1.9) перестановочны. Поэтому, с учетом циклического свойства R-следа, имеем

$$y\left(\sigma_k(\ell)\, E^\lambda_\alpha \, \sigma_k^{-1}(\ell)\right) \;=\; y(E^\lambda_\alpha)\,, \quad y(E^\lambda_{\pi_k(\alpha)\alpha}) = w(\ell)\, y\left(E^\lambda_{\pi_k(\alpha)}\, \sigma_k(\ell)\, E^\lambda_\alpha\right) = 0, \tag{1.13}$$

где $\ell := \ell_k\{^\lambda_\alpha\}$. Далее, с использованием формул (A.8), (A.10), (A.17), (A.18) соотношения (A.13) можно представить в виде

$$E^\lambda_{\pi_k(\alpha)} \;=\; \sigma_k(\ell)\, E^\lambda_\alpha \, \sigma_k^{-1}(\ell) \;-\; (q - q^{-1})\, w(-\ell)\, E^\lambda_{\pi_k(\alpha)\alpha}\,, \tag{1.14}$$

откуда заключаем $y(E^\lambda_{\pi_k(\alpha)}) = y(E^\lambda_\alpha)$. Наконец, цикличность действия симметрической группы на множестве стандартных таблиц гарантирует непротиворечивость определения функций Шура.

Утверждение 6 *Для всякой квантовой матричной алгебры $\mathcal{M}(R,F)$ геккевского типа*

а) ее характеристическая подалгебра $\mathrm{Char}(R, F)$ *порождается единицей и степенными суммами $p_k(M)$, $k = 1, 2, \dots$;*

б) набор функций Шура $s_\lambda(M)$, $\lambda \vdash k$, $k = 0, 1, \dots$, является линейным базисом $\mathrm{Char}(R, F)$.

Доказательство. Первая часть утверждения доказана в [45]. Для доказательства второй части заметим, что из рассуждений, приведенных в обоснование формул (1.12), следуют равенства

$$y(E^\lambda_{\alpha\beta}) \;=\; \delta_{\alpha\beta}\, y(E^\lambda_\alpha), \quad y(E^\lambda_\alpha) \;=\; y(E^\lambda_\beta), \qquad \forall\, \alpha, \beta. \tag{1.15}$$

Поэтому утверждение о линейном базисе функций Шура следует из того, что наборы матричных единиц $\{E^\lambda_{\alpha\beta}\,|\,\lambda\vdash k\}$ образуют линейные базисы в алгебрах $\mathcal{H}_k(q)$. $\square$

1.3 Степени квантовых матриц

Рассмотрим в пространстве $\mathrm{Mat}_N(\mathcal{M}(R,F))$ линейную оболочку $\mathrm{Pow}(R,F)$, порожденную единичной матрицей и матрицами вида

$$M^{(x^{(k)})} := \mathrm{Tr}_{R(2\ldots k)}(M_{\overline{1}}\ldots M_{\overline{k}}\,\rho_R(x^{(k)})) \qquad k=1,2,\ldots, \tag{1.16}$$

где $x^{(k)}$ всевозможные элементы алгебры $\mathcal{H}_k(q)$. Матрицу $M^{(x^{(k)})}$ будем называть $x^{(k)}$*-й степенью* матрицы M, а само пространство $\mathrm{Pow}(R,F)$ — *пространством матричных степеней*.

Утверждение 7 *Пространство* $\mathrm{Pow}(R,F)$ *является правым модулем над характеристической подалгеброй* $\mathrm{Char}(R,F)$.

Доказательство этого утверждения проводится с использованием формулы (1.10) и аналогично выкладкам, проводимым при доказательстве коммутативности характеристической подалгебры $\mathrm{Char}(R,F)$ (см. [45]).

В пространстве матричных степеней $\mathrm{Pow}(R,F)$ рассмотрим специальный набор матриц, а именно, по всякой стандартной таблице Юнга $\left\{\begin{smallmatrix}\lambda\\ \alpha\end{smallmatrix}\right\}$ разбиения $\lambda\vdash k$, $k=1,2,\ldots$, построим матрицу

$$M^{((1);1)} := M, \quad M^{(\lambda;i)} := \mathrm{Tr}_{R(2\ldots k)}(M_{\overline{1}}\ldots M_{\overline{k}}\,\rho_R(E^\lambda_\alpha)), \quad k=2,3,\ldots, \tag{1.17}$$

где индекс i в обозначении $M^{(\lambda;i)}$ является порядковым номером (при счете сверху вниз) строки таблицы $\left\{\begin{smallmatrix}\lambda\\ \alpha\end{smallmatrix}\right\}$, в которой находится k — наибольшее из заполняющих таблицу чисел. Например, для стандартной таблицы

1	3	4	6
2	7		
5			

наибольшее из заполняющих ее чисел $k=7$ расположено в строке с номером $i=2$.

Матрица $M^{(\lambda;i)}$, определенная в (1.17), не зависит от расположения чисел меньших k в клетках таблицы $\left\{\begin{smallmatrix}\lambda\\ \alpha\end{smallmatrix}\right\}$. Доказательство этого факта в целом повторяет рассуждения приведенные в обоснование однозначности определения функций Шура (см. абзац следующий за формулой (1.12)). Следует лишь дополнительно учесть, что цепочка преобразований, связывающих матричные единицы E^λ_α и E^λ_β, $\lambda\vdash k$, у которых наибольшее число k в соответствующих им таблицах стоит на одном и том же месте, осуществляется с помощью элементов $x^{(k-1)}$ подалгебры $\mathcal{H}_{k-1}(q)$. Именно по отношению к образам $\rho_R(x^{(k-1)})\in \mathrm{Id}_V\otimes \mathrm{Aut}(V^{\otimes(k-1)})$ таких элементов операция $\mathrm{Tr}_{R(2\dots k)}$ обладает свойством цикличности.

Помимо $M^{(\lambda;i)}$, введем в рассмотрение серию матриц $M^{\overline{k}}$:

$$M^{\overline{1}} := M, \quad M^{\overline{k}} := \mathrm{Tr}_{R(2\dots k)}(M_{\overline{1}}\dots M_{\overline{k}}R_{k-1}\dots R_1), \quad k=2,3,\dots \tag{1.18}$$

Матрицы $M^{(\lambda;i)}$ и $M^{\overline{k}}$ назовем, соответственно, *$(\lambda;i)$-й и k-й степенями* матрицы M.

Утверждение 8 *Для всякой квантовой матричной алгебры $\mathcal{M}(R,F)$ геккевского типа*

а) единичная матрица и семейство матриц $M^{\overline{k}}$, $k=1,2,\dots$, являются набором образующих правого $\mathrm{Char}(R,F)$-модуля $\mathrm{Pow}(R,F)$;

б) единичная матрица и семейство матриц $M^{(\lambda;i)}$, $\lambda\vdash k$, $k=1,2,\dots$, где индекс i пробегает все возможные значения для каждого разбиения $\lambda\vdash k$, являются базисом линейного пространства $\mathrm{Pow}(R,F)$.

Доказательства пунктов а) и б) этого утверждения являются вполне очевидным обобщением доказательств соответствующих пунктов утверждения 6.

В заключение раздела приведем другую формулу для k-ой степени матрицы M. С использованием свойства (A.35) совместимых пар $\{R,F\}$ можно убедиться, что определение (1.18) эквивалентно следующим итеративным формулам

$$M^{\overline{0}} = \mathrm{Id}_V, \quad M^{\overline{k}} = M\cdot\phi(M^{\overline{k-1}}), \tag{1.19}$$

где отображение ϕ задано формулой (A.36), а точка символизирует обычное матричное умножение. Соотношения (1.19) можно интерпретировать как результат последовательного применения квантового умножения $*$ матриц M:

$$M^{\overline{k}} = M\cdot\phi(M^{\overline{k-1}}) \equiv M * M^{\overline{k-1}} = \underbrace{M*M*\dots*M}_{k\ \text{множителей}}. \tag{1.20}$$

Это умножение было введено в разделе 4.4 работы [74]. Оно является ассоциативным ([74], предложение 4.12) и коммутативным (предложения 4.13 и 4.14). Последнее свойство не удивительно, поскольку все элементы пространства $\mathrm{Pow}(R,F)$ порождены одной и той же квантовой матрицей M. Кроме того, квантовое умножение (1.20) согласуется со структурой правого $\mathrm{Char}(R,F)$-модуля на $\mathrm{Pow}(R,F)$ и обладает свойством:

$$(I\,\mathrm{ch}(M)) * M^{\overline{k}} = M^{\overline{k}} * (I\,\mathrm{ch}(M)) \,, \quad \forall\, \mathrm{ch}(M) \in \mathrm{Char}(R,F)\,.$$

1.4 Тождество Гамильтона-Кэли для квантовой матричной алгебры

В классическом матричном анализе хорошо известна теорема Гамильтона-Кэли, которая утверждает, что для любой квадратной матрицы M с матричными элементами из поля $\mathbb{K}$, выполнено тождество

$$\Delta(M) \equiv 0, \tag{1.21}$$

где $\Delta(x) = \det(M - xI)$ — характеристический полином матрицы M. Если поле $\mathbb{K}$ алгебраически замкнуто, то коэффициенты этого полинома являются элементарными симметрическими функциями собственных значений M. В дальнейшем для простоты мы полагаем $\mathbb{K}$ полем комплексных чисел $\mathbb{C}$.

В работах [71, 79, 32, 47, 44] теорема Гамильтона-Кэли была последовательно обобщена на случай квантовых матричных алгебр $GL(m)$ типа. Всякая такая алгебра строится при помощи так называемых R-матричных представлений алгебр Гекке $GL(m)$ типа.

В статьях [59, 60] тождество Гамильтона-Кэли было найдено для матричных супералгебр. Одним из результатов, представляемых в данной диссертации, является обобщение этого тождества на случай квантовых матричных супералгебр.

Теорема 9 *Пусть $M = \|M_i^j\|_{i,j=1}^N$ — матрица образующих квантовой матричной алгебры $\mathcal{M}(R,F)$, задаваемой по паре совместимых, строго кособратимых R-матриц R и F, причем R есть R-матрица $GL(m|n)$ типа (см. разделы 1.1-1.3 и Приложение A). В алгебре $\mathcal{M}(R,F)$ тождественно выполняется матричное соотношение*

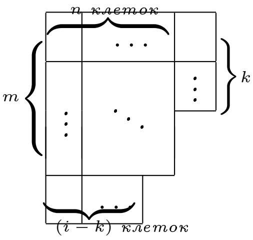
$$\sum_{i=0}^{n+m} M^{\overline{m+n-i}}\, C_i \;\equiv 0\,, \tag{1.22}$$

где $M^{\bar{i}}$ есть i-я степень квантовой матрицы (см. определение (1.18)), а коэффициенты C_i являются линейными комбинациями функций Шура (см. определение (1.12)).

Функции Шура, входящие в формулу для коэффициента C_i, являются однородными полиномами степени $(mn+i)$ по матричным компонентам M_i^j. Таким образом, любой матричный элемент левой части тождества (1.22) является однородным полиномом степени $(mn+m+n)$ по M_i^j.

Выражения для коэффициентов C_i в терминах функций Шура графически можно представить в виде

$$C_i = \sum_{k=\max\{0,(i-n)\}}^{\min\{i,m\}} (-1)^k q^{(2k-i)} \qquad (1.23)$$



где под каждой из диаграмм Юнга подразумевается соответствующая ей функция Шура.

В случае, если F и R являются матрицами перестановки на суперпространстве типа $(m|n)$, алгебра $\mathcal{M}(R,F)$ является матричной супералгеброй. При этом тождество (1.22) идентично инвариантным соотношениям Гамильтона-Кэли, полученным в [59, 60]. Отметим, что в суперслучае линейный размер N матрицы M связан с параметрами m и n соотношением $N = m + n$. Как показано в [23], в квантовом случае это соотношение вообще говоря не выполняется. Наше доказательство тождества (1.22) не требует наличия такой связи.

Доказательство. Фиксируем пару натуральных чисел $m \geq 1,\ n \geq 1$, и обозначим $A := (m+1)(n+1)$.

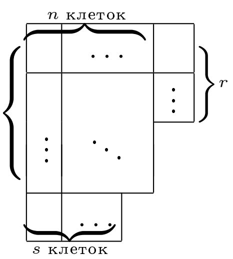
Введем специальные обозначения для разбиений следующих типов

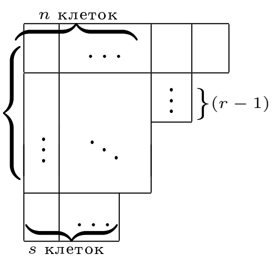
$$\Lambda(r,s) \;:=\; \big((n+1)^r, n^{(m-r)}, s\big)\,, \qquad r = 0,\dots,m,\ s = 0,\dots,n, \quad (1.24)$$

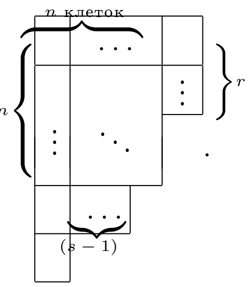
$$\Lambda^+(r,s) \;:=\; \big(n+2, (n+1)^{(r-1)}, n^{(m-r)}, s\big)\,, \qquad r = 1,\dots,m,\ s = 0,\dots,n, \quad (1.25)$$

$$\Lambda_+(r,s) \;:=\; \big((n+1)^r, n^{(m-r)}, s, 1\big)\,, \qquad r = 0,\dots,m,\ s = 1,\dots,n. \quad (1.26)$$

Ниже изображены соответствующие таким разбиениям диаграммы Юнга

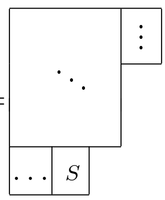
$\Lambda(r,s) =$ 

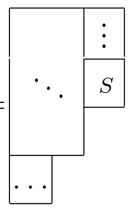
$\Lambda^+(r,s) =$ 

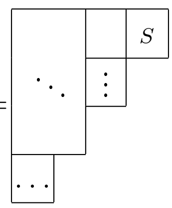
$\Lambda_+(r,s) =$ 

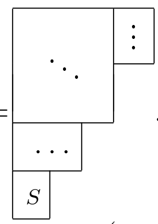
.

Символом $E_{row}^{\Lambda(r,s)}$, $s \geq 1$, (соответственно, $E_{col}^{\Lambda(r,s)}$, $r \geq 1$, $E^{\Lambda^+(r,s)}$, $E^{\Lambda_+(r,s)}$) обозначим одну из диагональных матричных единиц, отвечающих стандартной таблице формы $\Lambda(r,s)$ (соотв., $\Lambda(r,s)$, $\Lambda^+(r,s)$, $\Lambda_+(r,s)$) и содержащих стандартную таблицу формы $\Lambda(r,s-1)$ (соотв., $\Lambda(r-1,s)$, $\Lambda(r,s)$, $\Lambda(r,s)$). Иными словами, в диагональных матричных единицах $E_{row}^{\Lambda(r,s)}$, $E_{col}^{\Lambda(r,s)}$, $E^{\Lambda^+(r,s)}$ и $E^{\Lambda_+(r,s)}$ фиксировано расположение клетки с наибольшим номером S (S равно, соответственно, $mn+r+s$, $mn+r+s$, $mn+r+s+1$ и $mn+r+s+1$), как это показано на рисунке

$E_{row}^{\Lambda(r,s)} =$ 

$E_{col}^{\Lambda(r,s)} =$ 

$E^{\Lambda^+(r,s)} =$ 

$E^{\Lambda_+(r,s)} =$ 

. (1.27)

Подчеркнем, что дальнейшие выкладки не будут зависеть от выбора нумерации остальных клеток в матричных единицах (1.27).

Наконец, введем обозначения для следующих элементов пространства $\mathrm{Mat}_N(\mathcal{M}(R,F))$

$$P_{row}(r,s) \;:=\; \mathrm{Tr}_{R(2\dots A)}\left(M_{\overline{2}}\dots M_{\overline{A}}\;\rho_R(E_{row}^{\Lambda(r,s)})\,R_tR_{t-1}\dots R_1\right), \tag{1.28}$$

$$P_{col}(r,s) \;:=\; \mathrm{Tr}_{R(2\dots A)}\Big(M_{\overline{2}}\dots M_{\overline{A}}\;\rho_R(E_{col}^{\Lambda(r,s)})\,R_tR_{t-1}\dots R_1\Big), \tag{1.29}$$

$$P^+(r,s) \;:=\; \mathrm{Tr}_{R(2\dots A)}\Big(M_{\overline{2}}\dots M_{\overline{A}}\;\rho_R(E^{\Lambda^+(r,s)})\,R_{t-1}R_{t-2}\dots R_1\Big), \tag{1.30}$$

$$P_+(r,s) \;:=\; \mathrm{Tr}_{R(2\dots A)}\left(M_{\overline{2}}\dots M_{\overline{A}}\;\rho_R(E^{\Lambda_+(r,s)})\,R_{t-1}R_{t-2}\dots R_1\right), \tag{1.31}$$

где $t := (m-r)+(n-s)+1$. Рассмотрим линейные комбинации этих матриц вида

$$\begin{aligned}\Phi_i \;:=\; & \sum_{k=\max\{0,i-n\}}^{\min\{i-1,m\}}(-1)^k\,\frac{(i-k)_q(m+n-i+k+2)_q}{(m+n-i+2)_q}\,P_{row}(k,i-k)\\ & -\sum_{k=\max\{1,i-n\}}^{\min\{i,m\}}(-1)^k\,\frac{k_q(m+n-k+2)_q}{(m+n-i+2)_q}\,P_{col}(k,i-k)\;,\end{aligned} \tag{1.32}$$

где индекс i пробегает значения от 1 до $(m+n)$. Нашей ближайшей задачей является доказательство соотношений

$$\Phi_{i+1}-\Phi_i \;=\; \phi(M^{\overline{m+n-i}}) \sum_{k=\max\{0,i-n\}}^{\min\{i,m\}} (-1)^k\, q^{2k-i}\, s_{\Lambda(k,i-k)}(M)\,, \quad i=1,2,\dots,m+n-1. \tag{1.33}$$

С этой целью преобразуем выражение для Φ_i к виду

$$\begin{aligned}
\Phi_i \;\; = \;\; & \sum_{k=\max\{0,i-n\}}^{\min\{i-1,m\}} (-1)^k\, \tfrac{(i-k)_q (m+n-i+k+2)_q}{(m+n-i+2)_q} \Big\{ \tfrac{q^{(m+n+k-i+2)}}{(m+n+k-i+2)_q} P^+(k,i-k) \\
& \quad - \tfrac{q^{-(i-k)}}{(i-k)_q} P_+(k,i-k) + q P_{row}(k,i-k+1) + \tfrac{q^{(m+n-i+1)}}{(m+n-i+1)_q} P_{col}(k+1,i-k) \Big\} \\
- \;\; & \sum_{k=\max\{1,i-n\}}^{\min\{i,m\}} (-1)^k\, \tfrac{k_q (m+n-k+2)_q}{(m+n-i+2)_q} \Big\{ \tfrac{q^k}{k_q} P^+(k,i-k) - \tfrac{q^{-(m+n-k+2)}}{(m+n-k+2)_q} P_+(k,i-k) \\
& \quad - \tfrac{q^{-(m+n-i+1)}}{(m+n-i+1)_q} P_{row}(k,i-k+1) - q^{-1} P_{col}(k+1,i-k) \Big\}\,.
\end{aligned} \tag{1.34}$$

Здесь мы доопределили значения элементов (1.28)-(1.31) на границах областей изменения их индексов, то есть в тех случаях, когда используемые при их построении матричные единицы не определены:

$$P_{row}(k,n+1) = P_{col}(m+1,k) = P^+(k,0) = P_+(0,k) = 0, \quad k=0,1,\dots .$$

При выводе выражений (1.34) мы применили формулы (A.21) к матричным единицам (1.27)

$$E^{\Lambda(r,s)}_{row/col} \;=\; E^{\Lambda(r,s+1)}_{row} + E^{\Lambda(r+1,s)}_{col} + E^{\Lambda^+(r,s)} + E^{\Lambda_+(r,s)}\,, \tag{1.35}$$

и, затем, формулы (A.14) в виде

$$\rho_R(E^\lambda_\alpha) R_k \;=\; \omega^{-1}(\ell_k)\, \rho_R(E^\lambda_{\alpha,\pi_k(\alpha)}) \;-\; \frac{q^{-\ell_k}}{(\ell_k)_q}\, \rho_R(E^\lambda_\alpha)\,, \quad \text{где} \quad \lambda \vdash (k+1) \;\text{ и }\; \ell_k \equiv \ell_k\{^\lambda_\alpha\} \tag{1.36}$$

для преобразования членов $\rho_R(E^{\Lambda(r,s)}_{row/col})\, R_t$ в выражениях для $P_{row/col}(k,i-k)$. При этом, проводя выкладку аналогичную (1.15), можно показать, что член с недиагональной матричной единицей в правой части (1.36) не дает вклада в выражение (1.34).

Отметим, что выражения (1.35) для $E^{\Lambda(r,s)}_{row}$ и $E^{\Lambda(r,s)}_{col}$ формально не отличаются, потому что используемые нами обозначения (1.27) различают лишь позицию наибольшего из заполняющих таблицу Юнга чисел. Надо иметь в виду, что стоящие в правой части (1.35) матричные единицы для случаев $E_{row}^{\Lambda(r,s)}$ и $E_{col}^{\Lambda(r,s)}$ отличаются позицией числа на единицу меньшего, чем наибольшее. Это отличие проявляется при применении (1.36).

На следующем шаге преобразования мы приведем подобные члены в (1.34):

$$
\begin{aligned}
\Phi_i \;=\; & -\sum_{k=\max\{0,i-n\}}^{\min\{i,m\}} (-1)^k\, q^{2k-i}\, \{P^+(k,i-k) + P_+(k,i-k)\} \\
& + \sum_{k=\max\{0,i+1-n\}}^{\min\{i,m\}} \tfrac{(-1)^k}{(m+n-i+2)_q} \Big\{ q^{-(m+n-i+1)}\, \tfrac{k_q(m+n-k+2)_q}{(m+n-i+1)_q} \\
& \qquad + q\,(i-k)_q(m+n-i+k+2)_q \Big\} P_{row}(k,i-k+1) \\
& + \sum_{k=\max\{0,i-n\}}^{\min\{i,m-1\}} \tfrac{(-1)^k}{(m+n-i+2)_q} \Big\{ q^{(m+n-i+1)}\, \tfrac{(i-k)_q(m+n-i+k+2)_q}{(m+n-i+1)_q} \\
& \qquad + q^{-1}k_q(m+n-k+2)_q \Big\} P_{col}(k+1,i-k).
\end{aligned} \tag{1.37}
$$

Здесь для вычисления коэффициента при $P^+(\cdot,\cdot)$ и $P_+(\cdot,\cdot)$ удобно воспользоваться соотношением

$$
q^x y_q + q^{-y} x_q = (x+y)_q, \quad x, y \in \mathbb{Z}. \tag{1.38}
$$

Далее, мы преобразуем первое слагаемое в правой части (1.37), воспользовавшись выкладкой

$$
\begin{aligned}
& P^+(k,i-k) + P_+(k,i-k) + P_{row}(k,i-k+1) + P_{col}(k+1,i-k) \\
& = \mathrm{Tr}_{R(2\dots A)} \big(M_{\overline{2}} \dots M_{\overline{A}}\; \rho_R(E_\alpha^{\Lambda(r,s)})\, R_{m+n-i} \dots R_1 \big) \qquad (1.39) \\
& = \mathrm{Tr}_{R(2\dots(m+n-i+1))} \big(M_{\overline{2}} \dots M_{\overline{m+n-i+1}}\, R_{m+n-i} \dots R_1 \big)\; s_{\Lambda(k,i-k)}(M) \\
& = \phi(M^{\overline{m+n-i}})\, s_{\Lambda(k,i-k)}(M)\,. \qquad (1.40)
\end{aligned}
$$

При проведении этой выкладки сначала было использовано соотношение (1.35). Результат преобразования – (1.39) – оказался не зависящим от выбора индекса α матричной единицы и был затем разбит на два сомножителя с применением формулы (1.10). Наконец, первый из сомножителей был преобразован тем же способом, каким формулы (1.19) для матричных степеней выводятся из определения (1.18).

Подставляя (1.40) в (1.37), получаем

$$\begin{aligned}
\Phi_i &= -\,\phi(M^{\overline{m+n-i}}) \sum_{k=max\{0,i-n\}}^{\min\{i,m\}} (-1)^k q^{2k-i}\, s_{\Lambda(k,i-k)}(M) \\
&+ \sum_{k=\max\{0,i+1-n\}}^{\min\{i,m\}} (-1)^k\, \frac{(i+1-k)_q(m+n-i+k+1)_q}{(m+n-i+1)_q}\, P_{row}(k,i+1-k) \\
&+ \sum_{k=\max\{0,i-n\}}^{\min\{i,m-1\}} (-1)^k\, \frac{(k+1)_q(m+n-k+1)_q}{(m+n-i+1)_q}\, P_{col}(k+1,i-k)\ . \qquad (1.41)
\end{aligned}$$

Здесь для упрощении коэффициентов при $P_{row}(\cdot,\cdot)$ и $P_{col}(\cdot,\cdot)$ удобно применить формулу

$$q^{-x}\, \tfrac{(x+y+1)_q z_q}{x_q} + q\, y_q(x+z+1)_q + q^{z-y}\,(x+1)_q \;=\; \tfrac{(x+1)_q(y+1)_q(x+z)_q}{x_q}, \qquad (1.42)$$

которая легко проверяется с использованием (1.38).

Наконец, заменяя в последнем слагаемом (1.41) индекс суммирования $k \to k{+}1$, мы получаем окончательно формулу (1.33).

Нам остается построить аналоги соотношений (1.33) для граничных значений индекса $i = 0$ и $i = m+n$.

В случае $i = 0$ имеем:

$$\Phi_1 = P_{row}(1,0) + P_{col}(0,1) = \phi(M^{\overline{m+n}})\, s_{\Lambda(0,0)}(M)\,, \qquad (1.43)$$

что совпадает по виду с (1.33), если положить $\Phi_0 = 0$.

В случае $i = m+n$ преобразование величины Φ_{m+n} производится так же, как и при выводе соотношений (1.33). Особенность данного случая состоит в том, что, во-первых, при проведении выкладок возникает дополнительный член, связанный с диаграммой Юнга $((n+1)^{m+1})$, и во-вторых, $\Phi_{m+n+1} = 0$. Проводя вычисления, получаем

$$\begin{aligned}
\Phi_{m+n} &= (-1)^{m+1} q^{m-n}\, \mathrm{Id}_V\, s_{\Lambda(m,n)}(M) \\
&+ (-1)^m\,(m+1)_q(n+1)_q \mathrm{Tr}_{R(2\dots A)} \Big\{ M_{\overline{2}} \dots M_{\overline{A}}\ \rho_R\Big(E_{m+1}^{((n+1)^{m+1})}\Big)\Big\} \qquad (1.44)
\end{aligned}$$

что также совпадает по виду с (1.33), при условии что $\rho_R\Big(E_{m+1}^{((n+1)^{m+1})}\Big) = 0$, то есть в $GL(m|n)$ случае.

Суммируя левые и правые части всех соотношений (1.33) и (1.43) и вычитая соответствующие части соотношения (1.44), а затем применив к результату отображение ϕ^{-1} (см. (A.36), (A.37)), получаем следующий результат

$$\sum_{i=0}^{n+m} M^{\overline{m+n-i}} \sum_{k=\max\{0,i-n\}}^{\min\{i,m\}} (-1)^k q^{2k-i} s_{\Lambda(k,i-k)}(M) \equiv 0 \,, \tag{1.45}$$

что и представляет собой доказываемое тождество (1.22), если учесть явный вид коэффициентов, графически представленных в (1.23). $\square$

Замечание 10 Отметим некоторые особенности тождества Гамильтона-Кэли для конкретных примеров квантовых матричных алгебр, приведенных в разделе 1.1.

Матрица T генераторов алгебры $\mathcal{M}(R,P)$ (см. (1.5)) в случае, если R — R-матрица $GL(m)$ типа (в том числе и для R-матрицы Дринфельда-Джимбо), удовлетворяет полиномиальному тождеству Гамильтона-Кэли m-го порядка (см. [47, 45]), коэффициенты которого пропорциональны функциям Шура $s_{(1^k)}(T)$, $0 \le k \le m$. В классическом пределе $q \to 1$ R-матрица Дринфельда-Джимбо переходит в матрицу перестановки $\lim_{q\to 1} R = P$, и алгебра (1.5) становится коммутативной матричной алгеброй $\mathcal{M}(P,P)$. Соответствующее тождество Гамильтона-Кэли совпадает с тождеством (1.21) и, в частности, функции Шура $s_{(1^k)}(T)$ становятся элементарными симметрическими функциями собственных значений матрицы T.

Важной особенностью алгебры уравнения отражений $\mathcal{M}(R,R)$ (1.6) является тот факт, что ее характеристическая подалгебра $\mathrm{Char}(R,R)$ является центральной в $\mathcal{M}(R,R)$. Тождество Гамильтона-Кэли для алгебры $\mathcal{M}(R,R)$ с R-матрицей Дринфельда-Джимбо было получено в [71, 79] и обобщено на случай произвольной R-матрицы $GL(m)$ типа в [32]. Для сдвинутого базиса (1.7) соответствующее тождество было получено в [38]. Предел $q \to 1$ для R-матрицы Дринфельда-Джимбо переводит (1.7) в коммутационные соотношения для генераторов универсальной обертывающей алгебры $U(gl_N)$, а тождество Гамильтона-Кэли переходит в хорошо известное тождество для матрицы, составленной из генераторов $U(gl_N)$ (см., например, [31]).

1.5 Структура характеристической подалгебры

В данном разделе устанавливается правило Литтлвуда-Ричардсона для произведений квантовых функций Шура $s_\lambda(M)$, а также приводятся важные билинейные соотношения, обобщающие соотношения А.Кириллова [53]. Кроме того, вводится спектральная параметризация симметрических функций Шура, которая позволяет записать тождество Гамильтона-Кэли в факторизованном виде. Это позволяет интерпретировать спектральные компоненты как четные и нечетные (в смысле $\mathbb{Z}_2$ градуировки) собственные значения квантовой матрицы.

1.5.1 Правило Литтлвуда-Ричардсона

Рассмотрим градуированное кольцо Λ симметрических функций от счетного числа переменных. Как известно, $\mathbb{Z}$-базис кольца Λ образован симметрическими функциями Шура s_λ, $\lambda \vdash n$, для всех $n \geq 0$ (мы пользуемся определениями и обозначениями разделов 1.2 и 1.3 монографии [65]).

Рассмотрим аддитивное отображение кольца Λ в характеристическую подалгебру квантовой матричной алгебры $\mathcal{M}(R,F)$ геккевского типа:

$$\Lambda \ni s_\lambda \ \mapsto \ s_\lambda(M) \in \mathrm{Char}(R,F) \subset \mathcal{M}(R,F) \ \textit{(Геккевский тип)}. \tag{1.46}$$

Важный результат состоит в том, что в ситуации общего положения (когда выполнено (A.5) для всех натуральных k) это аддитивное отображение продолжается до гомоморфизма колец.

Теорема 11 ([34]) *Рассмотрим квантовую матричную алгебру $\mathcal{M}(R,F)$ Геккевского типа, генераторами которой являются компоненты матрицы M. Пусть параметр q удовлетворяет ограничению*

$$k_q = \frac{q^k - q^{-k}}{q - q^{-1}} \neq 0, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Тогда умножение элементов (1.12) характеристической подалгебры $\mathrm{Char}(R,F)$ *подчиняется следующему правилу*

$$s_\lambda(M) s_\mu(M) = \sum_{\nu \vdash (k+n)} c^\nu_{\lambda\mu} s_\nu(M), \tag{1.47}$$

где $\lambda \vdash n$ и $\mu \vdash k$ есть произвольные разбиения, $s_\lambda(M), s_\mu(M) \in \mathrm{Char}(R,F)$ являются функциями Шура, а константы $c^\nu_{\lambda\mu}$ совпадают с коэффициентами Литтлвуда-Ричардсона ([65], раздел 1.9).

Доказательство. В тексте доказательства мы будем пользоваться обозначениями статьи [33]. Ссылки на результаты этой работы будут даваться в сокращенном виде, например, символ (I-3.21) означает ссылку на формулу (21) раздела 3 статьи [33].

Поскольку справедливость формулы (1.47) в случае $m = 0$ или $k = 0$ очевидна, мы будем полагать $m \geq 1$ и $k \geq 1$.

Докажем вначале соотношение (1.47) для случая, когда разбиение $\mu = (1^k)$ представлено диаграммой с одним столбцом. В этой ситуации общая формула (1.47) преобразуется к следующему виду

$$s_\lambda(M) s_{(1^k)}(M) = \sum_{\substack{\nu \supset \lambda \\ \nu \vdash (k+n)}}{}' s_\nu(M). \tag{1.48}$$

Символ $\supset$ обозначает отношение включения на множестве стандартных таблиц Юнга (см. раздел I.2.1), а в суммировании $\sum'$ учитываются только те диаграммы ν, для которых теоретико-множественная разность с диаграммой λ является полосой (терминология раздела 1.1 монографии [65]).

Примитивные идемпотенты $E^{(1^k)}$ алгебры Гекке, отвечающие одностолбцовым диаграммам (1^k), $k = 2, 3, \dots$, строятся посредством хорошо известных итеративных соотношений (см., например, лемму 7.2 работы [94] или раздел 2.3 работы [32])

$$E^{(1)} = 1, \qquad E^{(1^k)} = \frac{(k-1)_q}{k_q}\, E^{(1^{k-1})} \Big(\frac{q^{k-1}}{(k-1)_q}\, 1 \,-\, \sigma_{k-1} \Big) E^{(1^{k-1})}. \tag{1.49}$$

Здесь мы используем обозначения раздела I.2.2: $\{\sigma_i\}_{i=1}^{p-1}$ — набор генераторов алгебры Гекке $\mathcal{H}_p(q)$ (см. формулы (I.2.2)-(I.2.4)), их образами в R-матричных представлениях являются R-матрицы: $\rho_R(\sigma_i) = R_i$.

Пользуясь соотношениями (1.49), выполним последовательно следующие тождественные преобразования

$$\begin{aligned}
& s_\lambda(M) s_{(1^k)}(M) \;=\; \mathrm{Tr}_{R(1\dots n+k)} \Big[\rho_R(E^\lambda_\alpha)\, \rho_R(E^{(1^k)\uparrow n})\, M_{\overline{1}} \dots M_{\overline{n+k}} \Big] \\
&= \frac{(k-1)_q}{k_q}\, \mathrm{Tr}_{R(1\dots n+k)} \Big[\rho_R(E^\lambda_\alpha\, E^{(1^{k-1})\uparrow n}) \Big(\frac{q^{k-1}}{(k-1)_q} I - R_{n+k-1} \Big) \rho_R(E^{(1^{k-1})\uparrow n})\, M_{\overline{1}} \dots M_{\overline{n+k}} \Big] \\
&= \frac{(k-1)_q}{k_q}\, \mathrm{Tr}_{R(1\dots n+k)} \Big[\rho_R(E^\lambda_\alpha\, E^{(1^{k-1})\uparrow n}) \Big(\frac{q^{k-1}}{(k-1)_q} I - R_{n+k-1} \Big) M_{\overline{1}} \dots M_{\overline{n+k}} \Big] = \dots \\
&= \frac{1}{k_q}\, \mathrm{Tr}_{R(1\dots n+k)} \Big[\rho_R(E^\lambda_\alpha) \Big(qI - R_{n+1} \Big) \dots \Big(\frac{q^{k-1}}{(k-1)_q} I - R_{n+k-1} \Big) M_{\overline{1}} \dots M_{\overline{n+k}} \Big].
\end{aligned} \tag{1.50}$$

В первой строке преобразований мы воспользовались определением функций Шура (1.12) и свойством (I.3.19) для $s_{(1^k)}(M)$ (обозначение $E^{\mu\uparrow n}_\beta$ объясняется в лемме I.6). Напомним, что преобразуемое выражение не зависит от выбора значения индекса α, нумерующего примитивные идемпотенты $E^\lambda_\alpha \in \mathcal{H}_n(q)$. Во второй строке использована формула (1.49) (напомним, что $R_i = \rho_R(\sigma_i)$). В третьей строке преобразований сомножитель $\rho_R(E^{(1^{k-1})\uparrow n})$ переставляется с цепочкой произведений матриц M на основании соотношений (1.4), затем применяется циклическое свойство R-следа, чтобы переместить $\rho_R(E^{(1^{k-1})\uparrow n})$ в крайнее левое положение и, наконец, учитывается коммутативность идемпотентов $E^{(1^{k-1})\uparrow n}$ и E^λ_α. Повторив описанные операции $(k-1)$ раз, мы получим в итоге выражение, приведенное в последней строке.

Для удобства последующих ссылок введем специальное обозначение для выражения, стоящего в формуле (1.50) под знаком R-следа

$$Q(R) \;:=\; \rho_R(E^\lambda_\alpha)\, X_{n+1}\,, \tag{1.51}$$

где

$$X_i \;:=\; \Bigl(\frac{q^{i-n}}{(i-n)_q} I - R_i\Bigr)\Bigl(\frac{q^{i-n+1}}{(i-n+1)_q} I - R_{i+1}\Bigr)\dots\Bigl(\frac{q^{k-1}}{(k-1)_q} I - R_{n+k-1}\Bigr) \tag{1.52}$$

Заметим, что вследствие перестановочных соотношений (1.4) и циклического свойства R-следа, можно совершать циклические перестановки сомножителей в $Q(R)$, не изменяя значения выражения (1.50). Воспользуемся такой циклической инвариантностью для преобразования $Q(R)$ к подходящему виду.

Стратегия этого преобразования заключается в следующем. Как известно, любой идемпотент алгебры Гекке $E^\lambda_\alpha \in \mathcal{H}_n(q)$ $(\lambda \vdash n)$ может быть представлен в виде следующей суммы идемпотентов $E^\nu_\beta \in \mathcal{H}_{n+i}(q)$ $(\nu \vdash (n+i),\ i \ge 1)$ (см. формулу (I.2.21))

$$E^\lambda_\alpha = \sum_{\substack{\nu\supset\lambda \\ \nu\vdash(n+i)}} \; \sum_{\substack{\beta: \\ \beta\supset\alpha}} E^\nu_\beta. \tag{1.53}$$

Последовательно повышая значение i в разложении (1.53) от 2 до k, мы сможем вычислять значения множителей $\bigl(q^{i-1}/(i-1)_q I - R_{n+i-1}\bigr)$, входящих в $Q(R)$, на идемпотентах $\rho_R(E^\nu_\beta)$ в соответствии с правилом

$$\rho_R(E^\nu_\beta)\Bigl(\frac{q^{i-1}}{(i-1)_q} I - R_{n+i-1}\Bigr) \overset{\circlearrowleft}{=} \frac{(\ell_{n+i-1} + i - 1)_q}{(i-1)_q\,(\ell_{n+i-1})_q}\, \rho_R(E^\nu_\beta). \tag{1.54}$$

Здесь символ “$\overset{\circlearrowleft}{=}$” означает равенство по модулю циклической перестановки сомножителей; $\ell_j := c(j) - c(j+1)$ обозначает разность содержаний клеток с номерами

j и $(j+1)$ в стандартной таблице $\left\{\begin{smallmatrix}\nu\\ \beta\end{smallmatrix}\right\}$ (соответствующие определения приведены в разделе I.2.1).

Приведенное выше правило вычисления множителей с R-матрицами обосновывается следующим образом. Заметим, что в алгебре $\mathcal{H}_{n+i}(q)$ (см. (I.2.16)) справедливы соотношения

$$E^\nu_\beta\,\sigma_j \equiv E^\nu_\beta\Big(\sigma_j + \frac{q^{-\ell_j}}{(\ell_j)_q}1\Big) - \frac{q^{-\ell_j}}{(\ell_j)_q}\,E^\nu_\beta = \frac{(\ell_j+1)_q}{(\ell_j)_q}E^\nu_{\beta\,\pi_j(\beta)} - \frac{q^{-\ell_j}}{(\ell_j)_q}\,E^\nu_\beta, \quad 1\le j\le n+i-1. \tag{1.55}$$

Символ $E^\nu_{\beta\,\pi_j(\beta)}$ обозначает внедиагональную матричную единицу, которая нумеруется парой стандартных таблиц Юнга $\left\{\begin{smallmatrix}\nu\\ \beta\end{smallmatrix}\right\}$ и $\left\{\begin{smallmatrix}\nu\\ \pi_j(\beta)\end{smallmatrix}\right\}$, причем таблица $\left\{\begin{smallmatrix}\nu\\ \pi_j(\beta)\end{smallmatrix}\right\}$ получается из $\left\{\begin{smallmatrix}\nu\\ \beta\end{smallmatrix}\right\}$ перестановкой π_j клеток с номерами j и $(j+1)$. Если таблица $\left\{\begin{smallmatrix}\nu\\ \pi_j(\beta)\end{smallmatrix}\right\}$ оказывается нестандартной, то слагаемое с $E^\nu_{\beta\,\pi_j(\beta)}$ в формуле (1.55) отсутствует.

Преобразуем теперь произведение $\rho_R(E^\nu_\beta)R_{n+i-1} = \rho_R(E^\nu_\beta\sigma_{n+i-1})$, стоящее в левой части формулы (1.54), с помощью равенства (1.55) и заметим, что вследствие циклической инвариантности вклад внедиагональных матричных единиц $\rho_R(E^\nu_{\beta\,\pi_j(\beta)})$ в выражение $Q(R)$ равен нулю. Действительно

$$\begin{aligned}\rho_R(E^\nu_{\beta\,\pi_j(\beta)})\,X_{n+i} \;=\; \rho_R(E^{\nu'}_{\beta'}E^\nu_{\beta\,\pi_j(\beta)})\,X_{n+i} &\stackrel{\circlearrowleft}{=} \rho_R(E^\nu_{\beta\,\pi_j(\beta)})\,X_{n+i}\;\rho_R(E^{\nu'}_{\beta'})\\ &= \rho_R(E^\nu_{\beta\,\pi_j(\beta)}E^{\nu'}_{\beta'})\,X_{n+i} \;=\; 0,\end{aligned} \tag{1.56}$$

где стандартная таблица $\left\{\begin{smallmatrix}\nu'\\ \beta'\end{smallmatrix}\right\}$, которой отвечает идемпотент $E^{\nu'}_{\beta'}$, получается из таблицы $\left\{\begin{smallmatrix}\nu\\ \beta\end{smallmatrix}\right\}$ удалением клетки с номером $(n+i)$. Первое и последнее равенства в последовательности преобразований (1.56) следуют из (1.53) и таблицы умножения матричных единиц (I.2.7). Во втором равенстве сделана циклическая перестановка сомножителей, которая допустима в выражении $Q(R)$. Кроме того, множители $\rho_R(E^{\nu'}_{\beta'})$ и X_{n+i} построены из взаимно коммутирующих R-матриц, откуда следует третье равенство в (1.56).

Наконец, перемножая все коэффициенты при диагональной матричной единице $\rho_R(E^\nu_\beta)$ в выражении $Q(R)$, мы получим правую часть формулы (1.54).

Итак, приступим к преобразованию $Q(R)$. Полагая в разложении (1.53) $i=2$, имеем

$$Q(R) = \sum_{\substack{\nu\supset\lambda\\ \nu\vdash(n+2)}}\;\sum_{\substack{\beta:\\ \beta\supset\alpha}}\rho_R(E^\nu_\beta)\Big(qI - R_{n+1}\Big)\,X_{n+2}. \tag{1.57}$$

Для последующих вычислений необходимо явно указать способ нумерации таблиц Юнга. Для произвольной таблицы $\left\{ {\lambda \atop \alpha} \right\}$, $\lambda \vdash n$, введем мультииндекс $\alpha := \{a_1, a_2, \dots a_n\}$ в виде упорядоченного множества пар натуральных чисел $a_i := \{x_i, y_i\}$, где x_i и y_i являются, соответственно, номерами столбца и строки, в которых содержится клетка с числом i. Напомним, что содержание i-й клетки определяется как разность $c(i) = x_i - y_i$ (см. раздел I.2.1).

В формуле (1.57) при суммировании по мультииндексу β изменяются только последние две его компоненты, которые мы для краткости обозначим a и b, то есть, $\beta = \{\dots, a, b\}$. Для значений, которые могут принимать компоненты a и b в суммировании (1.57), имеются следующие три возможности.

i) $a = \{x, y\}, b = \{x+1, y\}$. В этом случае $\ell_{n+1} = c(n+1) - c(n+2) = -1$. Следовательно, в силу правила (1.54) вклад соответствующих таблиц Юнга в $Q(R)$ равен нулю.

ii) $a = \{x, y\}, b = \{x, y+1\}$. В этом случае $\ell_{n+1} = c(n+1) - c(n+2) = 1$ и вклад таких таблиц в выражение (1.57) равен

$$2_q\, \rho_R(E^{\nu}_{\{\dots,a,b\}}) X_{n+2}. \tag{1.58}$$

iii) $a = \{x, y\}, b = \{\bar{x}, \bar{y}\}$, *причем* $x \neq \bar{x}$ *и* $y \neq \bar{y}$. В данном случае имеется пара стандартных таблиц одинаковой формы, нумеруемых индексами $\beta = \{\dots a, b\}$ и $\pi_{n+1}(\beta) = \{\dots b, a\}$. Объединяя вклады таких таблиц и учитывая (1.54), получаем следующий результат

$$\Big(\rho_R(E^{\nu}_{\{\dots,a,b\}})\, \frac{(\ell_{n+1}\, +\, 1)_q}{(\ell_{n+1})_q} \;+\; \rho_R(E^{\nu}_{\{\dots,b,a\}})\, \frac{(\ell_{n+1}\, -\, 1)_q}{(\ell_{n+1})_q}\Big)\, X_{n+2}. \tag{1.59}$$

Так как слагаемое (1.58) также можно записать в форме (1.59) с $\ell_{n+1} = 1$, то сумма (1.57) представляется в виде

$$Q(R) \overset{\circlearrowleft}{=} \sum_{\substack{\nu \supset \lambda \\ \nu \vdash (n+2) \\ (a,b)}}{}' \Big(\rho_R(E^{\nu}_{\{\dots,a,b\}})\, \frac{(\ell_{n+1}\, +\, 1)_q}{(\ell_{n+1})_q} \;+\; \rho_R(E^{\nu}_{\{\dots,b,a\}})\, \frac{(\ell_{n+1}\, -\, 1)_q}{(\ell_{n+1})_q}\Big)\, X_{n+2}\,, \tag{1.60}$$

где суммирование ведется по *диаграммам* $\nu \vdash (n+2)$ различной формы, которые перечисляются *неупорядоченными* парами (a, b), $a = \{x, y\}$ и $b = \{\bar{x}, \bar{y}\}$. Кроме того, имеется дополнительное ограничение $y \neq \bar{y}$, которое означает, что в диаграмме ν клетки с номерами $(n+1)$ и $(n+2)$ не могут располагаться в одной и той же строке. Это ограничение символически отражено штрихом у знака суммирования $\sum'$ (см. (1.48)).

Для последующих преобразований удобно перейти к эквивалентному определению величины ℓ_{n+1} и соответственно изменить обозначение

$$\ell_{n+1} = c(n+1) - c(n+2) \quad \longrightarrow \quad \ell_{ab} = (x-y) - (\bar{x} - \bar{y}).$$

Это позволяет явно отразить зависимость ℓ_{ab} от переменных суммирования a и b.

Перейдем к следующему шагу преобразования $Q(R)$. Подставляя разложение (1.53) с $i = 3$ в формулу (1.60) и учитывая, что $\ell_{ab} = -\ell_{ba}$, мы приходим к результату

$$Q(R) \overset{\circlearrowleft}{=} {\sum_{\substack{\tau\supset\lambda \\ \tau\vdash(n+2) \\ (a,b)}}}' \sum_{\substack{\nu\vdash(n+3): \\ c=\nu\setminus\tau}} \Big(\rho_R(E^{\nu}_{\{\dots,a,b,c\}})\, \tfrac{(\ell_{ab}+1)_q}{(\ell_{ab})_q} + \rho_R(E^{\nu}_{\{\dots,b,a,c\}})\, \tfrac{(\ell_{ba}+1)_q}{(\ell_{ba})_q}\Big)\Big(\frac{q^2}{2_q} I - R_{n+2}\Big) X_{n+3}, \tag{1.61}$$

где индекс суммирования c перечисляет все допустимые добавления клетки $(n+3)$ к диаграмме $\tau \vdash (n+2)$. Применением правила (1.54) выписанное выше выражение приводится к виду

$$Q(R) \overset{\circlearrowleft}{=} {\sum_{\substack{\tau\supset\lambda \\ \tau\vdash(n+2) \\ (a,b)}}}' \sum_{\substack{\nu\vdash(n+3): \\ c=\nu\setminus\tau}} \Big(\rho_R(E^{\nu}_{\{\dots,a,b,c\}})\, \tfrac{(\ell_{ab}+1)_q}{(\ell_{ab})_q} \tfrac{(\ell_{bc}+2)_q}{2_q(\ell_{bc})_q} + \rho_R(E^{\nu}_{\{\dots,b,a,c\}})\, \tfrac{(\ell_{ba}+1)_q}{(\ell_{ba})_q} \tfrac{(\ell_{ac}+2)_q}{2_q(\ell_{ac})_q}\Big) X_{n+3}, \tag{1.62}$$

Отметим, что образы идемпотентов $\rho_R(E^{\nu}_{\{\dots,a,b,c\}})$ и $\rho_R(E^{\nu}_{\{\dots,b,a,c\}})$, входящие в выражение (1.62), могут быть отождествлены. Действительно, вводя обозначение $\sigma_i(\ell) := (\sigma_i - q^{\ell}/\ell_q\, 1)$, получаем

$$\begin{aligned} \rho_R(E^{\nu}_{\{\dots,b,a,c\}}) X_{n+3} &\overset{\circlearrowleft}{=} \rho_R\Big(\sigma_{n+1}(\ell_{ab}) E^{\nu}_{\{\dots,b,a,c\}}\Big) X_{n+3}\, \rho_R\Big(\sigma_{n+1}(\ell_{ab})\Big)^{-1} \\ &= \rho_R\Big(E^{\nu}_{\{\dots,a,b,c\}} \sigma_{n+1}(-\ell_{ab}) (\sigma_{n+1}(\ell_{ab}))^{-1}\Big) X_{n+3} \overset{\circlearrowleft}{=} \rho_R(E^{\nu}_{\{\dots,a,b,c\}}) X_{n+3}, \end{aligned} \tag{1.63}$$

где в процессе преобразований приняты во внимание циклическая инвариантность, соотношения (I.2.13) и (I.2.10), а также формула (1.56). Таким образом, порядок компонент a и b мультииндекса суммирования по таблицам Юнга более не существен и мы упрощаем обозначение $E^{\nu}_{\{\dots,a,b,c\}}$ до $E^{\nu}_{\{\dots,c\}}$. В результате выражение (1.62) преобразуется к следующему виду

$$Q(R) \overset{\circlearrowleft}{=} {\sum_{\substack{\tau\supset\lambda \\ \tau\vdash(n+2) \\ (a,b)}}}' \sum_{\substack{\nu\vdash(n+3): \\ c=\nu\setminus\tau}} \rho_R(E^{\nu}_{\{\dots,c\}})\, \frac{(\ell_{ac}+1)_q}{(\ell_{ac})_q} \frac{(\ell_{bc}+1)_q}{(\ell_{bc})_q} X_{n+3}. \tag{1.64}$$

Здесь мы воспользовались связью $\ell_{ab} = \ell_{ac} - \ell_{bc}$ и упростили коэффициент при $\rho_R(E^{\nu}_{\{\dots,c\}})$ с помощью q-комбинаторной формулы (Б.3), в которой следует положить $k = 2$ и $b_1 = \ell_{ac}$, $b_2 = \ell_{bc}$ (см. Приложение). Двойное суммирование ведется с тем ограничением, что клетки $(n+1)$, $(n+2)$ и $(n+3)$, помеченные индексами a, b и c, должны располагаться в различных строках диаграммы ν.

Наконец, подготовим выражение (1.64) к очередному этапу преобразований. С этой целью сгруппируем слагаемые, отвечающие таблицам одинаковой формы

$$Q(R) \overset{\circlearrowleft}{=} \sideset{}{'}\sum_{\substack{\nu\supset\lambda\\ \nu\vdash(n+3)\\ (a,b,c)}} \Big(\rho_R(E^{\nu}_{\{\dots,a,b,c\}}) \frac{(\ell_{ac}+1)_q}{(\ell_{ac})_q}\frac{(\ell_{bc}+1)_q}{(\ell_{bc})_q} + \rho_R(E^{\nu}_{\{\dots,b,c,a\}}) \frac{(\ell_{ba}+1)_q}{(\ell_{ba})_q}\frac{(\ell_{ca}+1)_q}{(\ell_{ca})_q}$$
$$+ \rho_R(E^{\nu}_{\{\dots,c,a,b\}}) \frac{(\ell_{cb}+1)_q}{(\ell_{cb})_q}\frac{(\ell_{ab}+1)_q}{(\ell_{ab})_q}\Big) X_{n+3}. \quad (1.65)$$

где суммирование идет по различным диаграммам разбиений $\nu \vdash (n+3)$, нумеруемым *неупорядоченными* тройками (a, b, c), такими, что никакая пара клеток из a, b и c не расположена в одной строке диаграммы ν.

Повторяя преобразования, описанные формулами (1.61)–(1.65), последовательно для $i = 4, \dots, k$ и пользуясь q-комбинаторными соотношениями (Б.3), мы получим следующий результат

$$Q(R) \overset{\circlearrowleft}{=} \sideset{}{'}\sum_{\substack{\tau\supset\lambda\\ \tau\vdash(n+k-1)\\ (a_1,\dots,a_{k-1})}} \sum_{\substack{\nu\vdash(n+k)\\ a_k=\nu\setminus\tau}} \rho_R(E^{\nu}_{\{\dots,a_k\}}) \prod_{i=1}^{k-1} \frac{(\ell_{a_i a_k}+1)_q}{(\ell_{a_i a_k})_q}\,. \quad (1.66)$$

Здесь неупорядоченные наборы $(a_1, \dots a_{k-1})$ нумеруют диаграммы $\tau \vdash (n+k-1)$ различной формы, ограниченные условием, что разность $\tau \setminus \lambda$ является вертикальной полосой. Индекс суммирования a_k пробегает все возможные диаграммы, которые получаются из $\tau \vdash (n+k-1)$ добавлением клетки $(n+k)$.

Формула (1.66) аналогична соотношению (1.64) при $i = k$. Важное отличие заключается в отсутствии X-сомножителя в ее правой части (можно считать $X_{n+k} = 1$). Вследствие этого, в финальной формуле для $Q(R)$ можно отождествить образы различных идемпотентов $\rho_R(E^{\nu}_{\{\dots,a_k,\dots\}})$, отвечающих таблицам разбиений $\nu \vdash (n+k)$ одинаковой формы (индекс a_k пробегает все возможные положения клетки с номером $(n+k)$). Таким образом, аналог формулы (1.65) записывается в виде

$$Q(R) \overset{\circlearrowleft}{=} \sideset{}{'}\sum_{\substack{\nu\supset\lambda\\ \nu\vdash(n+k)\\ (a_1,\dots,a_k)}} \rho_R(E^{\nu}_{\{\dots\}}) \sum_{j=1}^{k} \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{k} \frac{(\ell_{a_i a_j}+1)_q}{(\ell_{a_i a_j})_q} \;=\; k_q \sideset{}{'}\sum_{\substack{\nu\supset\lambda\\ \nu\vdash(n+k)}} \rho_R(E^{\nu}_{\{\dots\}})\,, \quad (1.67)$$

где при переходе ко второму равенству использована формула (Б.2), в которой следует положить $\ell_{a_i a_j} = b_i - b_j$. Символом $E^{\nu}_{\{\dots\}}$ обозначен произвольный примитивный идемпотент, отвечающий диаграмме Юнга ν, а суммирование $\sum'$ идет по всем диаграммам $\nu \vdash (n+k)$ таким, что разность $\nu \setminus \lambda$ является вертикальной полосой.

Подставляя выражение (1.67) для $Q(R)$ в (1.50), мы приходим к формуле (1.48), представляющей собой частный случай правила Литтлвуда-Ричардсона для умножения функций Шура $s_\lambda(M)$.

Распространим доказательство на общий случай. С этой целью заметим, что элементы $s_{(1^k)}(M)$, $k = 0, 1, \dots$, образуют $\mathbb{Z}$-базис генераторов множества всех функций Шура. Действительно, пользуясь формулой (1.48) легко увидеть, что

$$s_{(2^k 1^m)}(M) = s_{(1^{(k+m)})}(M) s_{(1^k)}(M) - s_{(1^{(k+m+1)})}(M) s_{(1^{(k-1)})}(M), \quad \forall\, k \geq 1, m \geq 0\,.$$

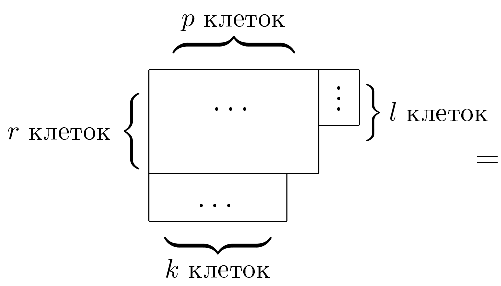
Затем с помощью соотношения (1.48) элементы $s_{(3^k, 2^m, 1^n)}(M)$ также выражаются через линейные комбинации мономов вида $s_{(2^l 1^p)}(M) s_{(1^r)}(M)$ и так далее. Повторив эту процедуру конечное число раз, мы можем выразить любую функцию Шура $s_\lambda(M)$ в виде полинома от генераторов $s_{(1^k)}(M)$, $k = 0, 1, \dots$ с целыми коэффициентами. Явные выражения даются известными тождествами Якоби-Труди (см. [65], раздел 1.3).

Наконец, поскольку произведение генераторов $s_{(1^k)}(M)$ описывается частным случаем (1.48) правила Литтлвуда-Ричардсона, то и произведение двух произвольных функций Шура $s_\lambda(M)$ и $s_\mu(M)$ дается выражением (1.47). $\square$

1.5.2 Билинейные соотношения

В этом разделе предъявлена серия билинейных соотношений для симметрических функций Шура $s_\lambda \in \Lambda$. Образами этих соотношений относительно гомоморфизма (1.46) являются тождества в характеристической подалгебре квантовой матричной алгебры Геккевского типа. Билинейные соотношения позволяют провести факторизацию тождества Гамильтона-Кэли в $GL(m|n)$ случае в произведение двух сомножителей, что позволяет разделить "четную" и "нечетную" части спектра квантовых матриц.

Для компактной формулировки нужных соотношений введем сокращенное обозначение для диаграмм Юнга (разбиений) следующего вида



$$= \big((p+1)^l, p^{(r-l)}, k\big) =: [r|p]^l_k \,. \tag{1.68}$$

Здесь индексы k и l принимают целочисленные значения $l = 0, \ldots, r$, $k = 0, \ldots, p$. Если значение одного из индексов k или l равно нулю, мы будем его опускать: $[r|p]^0_k = [r|p]_k$.

Утверждение 12 *Зафиксируем натуральные числа r, p, l и k, удовлетворяющие условиям $1 \leq l \leq r$ и $1 \leq k \leq p$. Тогда в кольце симметрических функций Λ выполняются следующие билинейные соотношения (см. обозначения (1.68))*

$$s_{[r|p]^l_k}\, s_{[r|p]} = s_{[r-1|p-1]^{(l-1)}_{(k-1)}}\, s_{[r+1|p+1]} + s_{[r|p]_k}\, s_{[r|p]^l} \,. \tag{1.69}$$

Доказательство. Доказательство основано на соотношениях Плюккера для произведения детерминантов матриц (подробности приведены в [91]). Введем удобные обозначения. Рассмотрим пару $n \times n$ матриц $A = \|a_{ij}\|_1^n$ и $B = \|b_{ij}\|_1^n$. Сопоставим i-й строке матрицы A символ a_{i*} и введем следующие обозначения

$$\det A := [A]\,, \qquad A := \begin{pmatrix} a_{1*} & \ldots & a_{i*} & \ldots & a_{n*} \\ 1 & \ldots & i & \ldots & n \end{pmatrix}, \tag{1.70}$$

где последнее обозначение позволяет следить за порядком расположения строк матрицы A — в данном случае строка матричных элементов a_{i*} находится на i-м месте (при счете сверху вниз).

Зафиксируем набор целочисленных данных $\{k, r_1, r_2, \ldots, r_k\}$, где $1 \leq k \leq n$ и $1 \leq r_1 < \cdots < r_k \leq n$. Соответствующие этим данным соотношения Плюккера имеют вид

$$[A][B] = \sum_{1 \leq s_1 < \cdots < s_k \leq n} \begin{bmatrix} a_{1*} & \ldots & b_{s_1*} & \ldots & b_{s_2*} & \ldots & b_{s_k*} & \ldots & a_{n*} \\ 1 & \ldots & r_1 & \ldots & r_2 & \ldots & r_k & \ldots & n \end{bmatrix} \times$$
$$\begin{bmatrix} b_{1*} & \ldots & a_{r_1*} & \ldots & a_{r_2*} & \ldots & a_{r_k*} & \ldots & b_{n*} \\ 1 & \ldots & s_1 & \ldots & s_2 & \ldots & s_k & \ldots & n \end{bmatrix}, \tag{1.71}$$

где суммирование ведется по всем возможным наборам $\{k, s_1, \ldots, s_k\}$.

Воспользуемся известным детерминантным представлением Якоби-Труди симметрической функции s_λ, отвечающей разбиению $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ (см. [65], раздел 1.3, соотношение (3.4))

$$s_\lambda = \det \|h_{\lambda_i - i + j}\|_{i,j=1}^m. \tag{1.72}$$

Здесь натуральное число $m \geq p$, и компонентами матрицы в правой части служат полные симметрические функции (то есть, симметрические функции Шура, отвечающие однострочным диаграммам) $h_i := s_{(i)}$. Кроме того, по определению $h_i := 0$ при $i < 0$.

Подставив выражение (1.72) в левую часть (1.69) мы получим в обозначениях (1.70)

$$\begin{aligned} s_{[r|p]^l_k} s_{[r|p]} = \ & \begin{bmatrix} h_{p+1*} & h_{p*} & \ldots & h_{p-l+2*} & h_{p-l*} & \ldots & h_{p-r+1*} & h_{k-r*} \\ 1 & 2 & \ldots & l & l+1 & \ldots & r & r+1 \end{bmatrix} \times \\ & \begin{bmatrix} h_{p*} & h_{p-1*} & \ldots & h_{p-l+1*} & h_{p-l*} & \ldots & h_{p-r+1*} & h_{-r*} \\ 1 & 2 & \ldots & l & l+1 & \ldots & r & r+1 \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{1.73}$$

где символы $h_{i*} := (h_i, h_{i+1}, h_{i+2}, \ldots)$ отвечают строкам матрицы из формулы Якоби-Труди (1.72).

Преобразуем теперь правую часть выражения (1.73) с помощью соотношений Плюккера для набора целых данных $\{k = 1, r_1 = r+1\}$. В данном случае большинство слагаемых в формуле (1.71) зануляется, поскольку они содержат детерминанты матриц с совпадающими строками. Единственная пара ненулевых слагаемых возникает при значениях индекса суммирования $s_1 = l$ и $s_1 = r + 1$. В результате мы приходим к равенству

$$\begin{aligned} s_{[r|p]^l_k} s_{[r|p]} = \ & \begin{bmatrix} h_{p+1*} & \ldots & h_{p-l+2*} & h_{p-l*} & \ldots & h_{p-r+1*} & h_{p-l+1*} \\ 1 & \ldots & l & l+1 & \ldots & r & r+1 \end{bmatrix} \times \\ & \begin{bmatrix} h_{p*} & \ldots & h_{k-r*} & h_{p-l*} & \ldots & h_{p-r+1*} & h_{-r*} \\ 1 & \ldots & l & l+1 & \ldots & r & r+1 \end{bmatrix} + \\ & \quad \begin{bmatrix} h_{p+1*} & \ldots & h_{p-l+2*} & h_{p-l*} & \ldots & h_{p-r+1*} & h_{-r*} \\ 1 & \ldots & l & l+1 & \ldots & r & r+1 \end{bmatrix} \times \\ & \quad \begin{bmatrix} h_{p*} & \ldots & h_{p-l+1*} & h_{p-l*} & \ldots & h_{p-r+1*} & h_{k-r*} \\ 1 & \ldots & l & l+1 & \ldots & r & r+1 \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{1.74}$$

которое с учетом соотношений Якоби-Труди в точности сводится к формуле (1.69) (предварительно нужно в первом слагаемом переместить $(r+1)$-ю строку первого сомножителя на $(l+1)$-е место, а l-ю строку второго сомножителя — на r-е место). $\square$

В работе [35] были получены гораздо более общие билинейные соотношения. Прежде чем сформулировать соответствующее утверждение, введем необходимые обозначения.

Пограничная полоса. Рассмотрим диаграмму Юнга, отвечающую разбиению $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Удалим из первой строки диаграммы $p_1 = \lambda_2 - 1$ клеток, начиная с *первой*, самой левой клетки этой строки. Из второй строки удалим $p_2 = \lambda_3 - 1$ клеток, также начиная с первой клетки и продолжим эту процедуру на все строки диаграммы, удаляя из k-й строки $p_k = \lambda_{k+1} - 1$ клеток, $1 \leq k \leq n-1$. Из последней, n-й строки, клетки удалять не будем. Получившуюся косую диаграмму будем называть полной пограничной полосой (boarder strip, терминология монографии McDonald'a [65]). Кроме того, пограничной полосой мы будем называть любое непустое собственное подмножество полной пограничной полосы, если оно представимо в виде теоретико-множественной разности $\lambda \setminus \nu$, где ν — некоторая диаграмма Юнга. Пример для разбиения $(8, 7, 4^3, 2^2)$ (клетки полной пограничной полосы отмечены звездочками):

$$\begin{array}{cccccccc}
\square & \square & \square & \square & \square & \square & * & * \\
\square & \square & \square & * & * & * & * & \\
\square & \square & \square & * & & & & \\
\square & \square & \square & * & & & & \\
\square & * & * & * & & & & \\
\square & * & & & & & & \\
* & * & & & & & &
\end{array} .$$

Общее число клеток в полной пограничной полосе равно $b_\lambda = \lambda_1 + \lambda_1' - 1$, где $\lambda_1' = \ell(\lambda)$ есть длина первой строки транспонированной диаграммы λ^T. Это доказывается просто: сначала надо подсчитать клетки во всех горизонтальных участках полосы, а потом — клетки во всех вертикальных участках, с учетом перекрытий в угловых клетках.

Примем следующую нумерацию клеток полной пограничной полосы. По определению полосы, в r-й строке диаграммы λ клетки полной пограничной полосы начинаются с λ_{r+1}-го столбца, считая от начала (левого края) r-й строки. Поэтому эти клетки в r-й строке можно занумеровать числом $s: 0 \le s \le \lambda_r - \lambda_{r+1}$. Положение клетки полной пограничной полосы, расположенной в r-й строке и $(\lambda_{r+1}+s)$-м столбце, мы будем обозначать координатной парой (r, s).

Полный срез. Из диаграммы Юнга, отвечающей разбиению λ, удалим полную пограничную полосу. Получившуюся диаграмму обозначим $\lambda\!\downarrow$. Будем говорить, что $\lambda\!\downarrow$ получена из диаграммы λ полным срезом пограничной полосы клеток (срез вниз из первой строки — пояснение смысла обозначения). Эта диаграмма может быть пустой, если исходная диаграмма имеет вид простого крюка:

$$(k, 1^m)\!\downarrow = \emptyset, \quad \forall\, k, m \ge 0.$$

Легко видеть, что что диаграмма $\lambda\!\downarrow$ получается из λ отбрасыванием ее первой строки и первого столбца. Поэтому высота диаграммы $\lambda\!\downarrow$ обязательно меньше высоты диаграммы λ:

$$\ell(\lambda\!\downarrow) \le \ell(\lambda) - 1.$$

Обратившись к покомпонентной записи разбиения λ, получаем состав разбиения $\lambda\!\downarrow$ в виде

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \quad \to \quad \lambda\!\downarrow = (\lambda_2 - 1, \lambda_3 - 1, \ldots, \lambda_n - 1, 0).$$

Частичный срез вниз. Рассмотрим диаграмму Юнга, отвечающую разбиению λ, и выберем некоторую клетку (r, s) в ее полной пограничной полосе. Удалим из диаграммы Юнга все клетки полной пограничной полосы, начиная с выбранной клетки, в направлении влево-вниз от нее (то есть, все клетки полной пограничной полосы r-й строки с номерами $\le s$ и все клетки полной пограничной полосы, расположенные в строках ниже r-й). Эту процедуру назовем частичным срезом вниз (полной пограничной полосы) из начальной клетки (r, s). В дальнейшем будем выбирать только такие начальные клетки, частичный срез вниз из которых не выводит из множества диаграмм Юнга. Ясно, что для этого начальная клетка должна располагаться так, чтобы *правее* нее в строке r клетки полной пограничной полосы отсутствовали (номер s начальной клетки — максимальный среди клеток полной пограничной полосы в r-й строке). Другими словами, начальная клетка частичного среза вниз из r-й строки для нас всегда будет последней (самой правой) клеткой этой строки.

Диаграмму (и разбиение), полученную частичным срезом вниз из последней клетки r-й строки, будем обозначать символом $\lambda\!\downarrow^{(r)}$. Компоненты разбиения $\lambda\!\downarrow^{(r)}$

следующие
$$\lambda{\downarrow}^{(r)} = (\lambda_1, \dots, \lambda_{r-1}, \lambda_{r+1}-1, \dots, \lambda_n - 1, 0).$$
Как и полный срез, частичный срез вниз уменьшает высоту диаграммы минимум на единицу.

Частичный срез вверх. Выберем в полной пограничной полосе диаграммы Юнга λ некоторую начальную клетку (r, s). Удалим из диаграммы все клетки полной пограничной полосы, начиная с начальной клетки, в направлении вправо-вверх от нее (то есть, все клетки полной пограничной полосы в r-й строке с номерами $\geq s$ и все клетки полной пограничной полосы, расположенные в строках выше r-й). Эту процедуру назовем частичным срезом вверх полной пограничной полосы из начальной клетки (r, s). В дальнейшем будем выбирать только такие начальные клетки, частичный срез вверх из которых не выводит из множества диаграмм Юнга. Ясно, что для этого начальная клетка должна располагаться так, чтобы непосредственно *под* ней клетки полной пограничной полосы отсутствовали. Это возможно только если длина r-й строки (где расположена начальная клетка) строго больше длины следующей строки $\lambda_r > \lambda_{r+1}$ и, кроме того, $s \geq 1$.

Диаграмму Юнга (и разбиение), полученную из диаграммы λ частичным срезом вверх из начальной клетки (r, s), мы будем обозначать $\lambda{\uparrow}_{(r,\,s)}$. Если срез вверх выполняется из *последней* клетки r-й строки ($s = \lambda_r - \lambda_{r+1}$), то номер s будем опускать с целью упрощения формул: $\lambda{\uparrow}_{(r,\,\lambda_r\,-\,\lambda_{r+1})} := \lambda{\uparrow}_{(r)}$.

Покомпонентный состав разбиения $\lambda{\uparrow}_{(r,\,s)}$ следующий
$$\lambda{\uparrow}_{(r,\,s)} = \Big(\underset{1}{\lambda_2 - 1}, \ \dots, \ \underset{r-1}{\lambda_r - 1}, \ \underset{r}{\lambda_{r+1} + s - 1}, \ \underset{r+1}{\lambda_{r+1}}, \ \dots, \ \underset{n}{\lambda_n}\Big), \quad 1 \leq s \leq \lambda_r - \lambda_{r+1},$$
где под разбиением $\lambda{\uparrow}_{(r,\,s)}$ для наглядности подписаны номера мест некоторых компонент.

Добавление клеток в диаграмму. Пусть дана диаграмма Юнга, отвечающая разбиению λ. Выберем в диаграмме строки с номерами $2 \leq r_1 < r_2 < \dots < r_k \leq n$ и предположим, что после добавления в каждую из строк r_i некоторого числа клеток a_i, мы снова получим диаграмму Юнга. Будем рассматривать только такие добавления, при которых косая диаграмма, образованная новыми клетками, является пограничной полосой (связной или нет). В этом случае пополненную диаграмму обозначим символом $\lambda^{+r_1,\dots,r_k}_{\ \ a_1,\dots,a_k}$. Подчеркнем, что в первую строку мы клеток не добавляем: $r_1 \geq 2$, и число строк (высоту) исходной диаграммы λ не увеличиваем: $r_k \leq n$.

Теорема 13 ([35]) *Пусть в диаграмме Юнга, соответствующей разбиению* $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, *существует* $k \geq 1$ *рядов с порядковыми номерами* $2 \leq r_1 < r_2 < \dots < r_k \leq r_{k+1} := n$, *таких, что*

$$\lambda_{r_i} < \lambda_{r_i - 1}, \quad 1 \leq i \leq k.$$

Пусть натуральные числа t_i, m_i, *где* $1 \leq i \leq k$, *удовлетворяют неравенствам*

$$1 \leq t_i \leq \lambda_{r_i - 1} - \lambda_{r_i}, \quad 1 \leq m_i \leq r_{i+1} - r_i, \quad 1 \leq i \leq k.$$

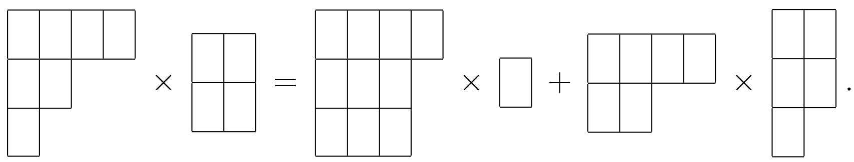
Тогда определена диаграмма Юнга $\lambda^{+\,t_1\ \dots\ t_k}_{\ (r_1,m_1)\dots(r_k,m_k)}$ *и выполнены следующие билинейные соотношения на симметрические функции Шура*

$$s_{\lambda} s_{\lambda^{+\,t_1\ \dots\ t_k}_{\ (r_1,m_1)\dots(r_k,m_k)}\downarrow} = s_{\lambda^{+\,t_1\ \dots\ t_k}_{\ (r_1,m_1)\dots(r_k,m_k)}} s_{\lambda\downarrow} + \sum_{p=1}^{k} s_{\lambda^{+\,t_1\ \dots\ t_k}_{\ (r_1,m_1)\dots(r_k,m_k)}\downarrow^{(r_p)}} s_{\lambda\uparrow_{(r_p-1,\,t_p)}}. \qquad (1.75)$$

Проиллюстрируем этот результат простым примером. Выберем разбиение $\lambda = (4, 2, 1)$, и построим диаграмму $\lambda^{+\,t_1\ \dots\ t_k}_{\ (r_1,m_1)\dots(r_k,m_k)}$, добавив одну клетку во вторую строку и две клетки в третью строку. Тогда тождество (1.75) принимает вид

$$s_{(4,2,1)} s_{(2,2)} = s_{(4,3,3)} s_{(1)} + s_{(4,2)} s_{(2,2,1)}.$$

В графической форме его можно представить следующим образом:



В качестве следствия равенства (1.75) можно получить обобщение соотношений Кириллова (см. работу [53])

$$s_{[m|n]}\, s_{[m|n]} = s_{[m+1|n]}\, s_{[m-1|n]} + s_{[m|n+1]}\, s_{[m|n-1]}\,, \qquad \forall\, m, n = 1, 2, \dots . \qquad (1.76)$$

на произведение двух одинаковых функций Шура, отвечающих произвольному разбиению λ. Для этого введем два типа преобразований соответствующей диаграммы Юнга, порождаемых сдвигами внутренних углов диаграммы. Пусть α — внутренний угол диаграммы Юнга разбиения λ. Произведем сдвиг в горизонтальном направлении вправо на одну клетку всех внутренних углов, расположенных выше выбранного угла α, а также сдвинем в вертикальном направлении вверх все внутренние углы, расположенные ниже угла α. Сам этото угол оставим неподвижным. Полученную таким преобразованием диаграмму Юнга обозначим $\lambda^+_-(\alpha)$. Аналогичным образом, сдвигая углы, расположенные выше угла α на одну клетку влево в горизонтальном направлении, а углы, лежащие ниже угла α, на одну клетку вниз в вертикальном направлении, получим диаграмму $\lambda^-_+(\alpha)$. Например, если исходная диаграмма Юнга отвечает разбиению $\lambda = (6, 5, 2^2, 1)$ и выбранный внутренний угол α —- третий сверху (между 2-й и 3-й строками диаграммы), то определенные выше преобразования выглядят следующим образом:

$$\lambda = (6, 5, 2^2, 1) \quad \Rightarrow \quad \lambda^+_-(\alpha_3) = (7, 6, 2, 1), \quad \lambda^-_+(\alpha_3) = (5, 4, 2^3, 1).$$

Теперь сформулируем вышеупомянутое обобщение соотношений А.Кириллова.

Следствие 14 *Пусть $\lambda = (\lambda_1^{m_1}, \dots, \lambda_k^{m_k})$ — некоторое произвольное разбиение. Обозначим символом $\mathfrak{C}_\lambda$ множество внутренних углов соответствующей диаграммы Юнга. Тогда справедливо следующее тождество на симметрические функции Шура:*

$$s_\lambda s_\lambda = \sum_{\alpha \in \mathfrak{C}_\lambda} s_{\lambda^+_-(\alpha)} s_{\lambda^-_+(\alpha)}. \tag{1.77}$$

В заключение приведем еще одну серию соотношений, обобщающую (1.76) (доказательство приведено в работе [34]).

Лемма 15 *Зафиксируем произвольные целые числа a, b, m, n такие, что $1 \le a \le m$, $1 \le b \le n$. Тогда в кольце симметрических функций Λ справедливы следующие тождества*

$$\begin{aligned} s_{[a|b]}\, s_{[m|n]} \;&= \sum_{k=\max\{1,a+b-n\}}^{a} (-1)^{a-k} s_{[m|n]_{a+b-k}}\, s_{[a-1|b-1]^{k-1}} \\ &+ \sum_{k=\max\{1,a+b-m\}}^{b} (-1)^{b-k} s_{[m|n]^{a+b-k}}\, s_{[a-1|b-1]_{k-1}}. \end{aligned} \tag{1.78}$$

Формулы (1.76) соответствуют выбору $a = m$, $b = n$.

1.5.3 Спектральные переменные и факторизация тождества Гамильтона-Кэли

Из условия (А.25) определения R-матрицы $GL(m|n)$ типа непосредственно вытекает, что если произвольная диаграмма Юнга λ содержит прямоугольную диаграмму

$((n+1)^{m+1}) = [m+1|n+1]$, то соответствующая функция Шура s_λ принадлежит ядру гомоморфизма (1.46)

$$s_\lambda \mapsto s_\lambda(M) = 0, \quad \forall\, \lambda: \ ((n+1)^{m+1}) \subset \lambda\,. \tag{1.79}$$

В результате этого, гомоморфные образы билинейных соотношений (1.69) при значениях параметров $r = m$, $p = n$ сводятся к следующим равенствам

$$s_{[m|n]_k^l}(M)\, s_{[m|n]}(M) = s_{[m|n]_k}(M)\, s_{[m|n]^l}(M)\,, \quad \forall\, k, l: \ 0 \le k \le n,\ 0 \le l \le m\,. \tag{1.80}$$

Соотношения (1.80) позволяют факторизовать характеристический полином (1.45). С этой целью, умножим тождество (1.45) на функцию Шура $s_{[m|n]}(M)$ справа и воспользуемся формулами (1.80). Результат запишется в виде

$$\sum_{i=0}^{m+n} M^{\overline{m+n-i}} \sum_{k=\max(0,i-n)}^{\min(i,m)} (-q)^k s_{[m|n]^k}(M)\ q^{k-i} s_{[m|n]_{(i-k)}}(M) \,\equiv\, 0\,. \tag{1.81}$$

Квантовое матричное умножение (1.20) позволяет записать приведенное выше выражение в виде произведения двух сомножителей.

Теорема 16 (Факторизованное тождество Кэли-Гамильтона) *В предположениях теоремы 9 из тождества (1.45) вытекает*

$$\Bigl(\sum_{k=0}^{m} (-q)^k\, M^{\overline{m-k}} s_{[m|n]^k}(M)\Bigr) * \Bigl(\sum_{r=0}^{n} q^{-r}\, M^{\overline{n-r}} s_{[m|n]_r}(M)\Bigr) \equiv 0\,. \tag{1.82}$$

Необходимым и достаточным условием эквивалентности тождеств (1.45) и (1.82) является обратимость функции Шура $s_{[m|n]}(M)$.

Факторизация тождества Кэли-Гамильтона указывает естественную параметризацию характеристической подалгебры квантовой матричной алгебры $GL(m|n)$ типа. А именно, рассмотрим гомоморфное отображение соответствующей характеристической подалгебры $\mathrm{Char}(R, F)$ в алгебру $\mathbb{C}[\mu, \nu]$ полиномов от двух наборов коммутирующих переменных $\mu := \{\mu_i\}_{1 \le i \le m}$ и $\nu := \{\nu_j\}_{1 \le j \le n}$. Гомоморфизм $\mathrm{Char}(R, F) \to \mathbb{C}[\mu, \nu] : s_\lambda(M) \mapsto s_\lambda(\mu, \nu)$, который мы будем называть *параметри-*

зационным отображением, задается формулами[6]

$$\frac{s_{[m|n]^k}(M)}{s_{[m|n]}(M)} \;\mapsto\; \frac{s_{[m|n]^k}(\mu,\nu)}{s_{[m|n]}(\mu,\nu)} := \sum_{1\le i_1<\dots<i_m\le m} q^{-k}\mu_{i_1}\dots\mu_{i_k} = e_k(q^{-1}\mu)\,, \quad 1\le k\le m \tag{1.83}$$

$$\frac{s_{[m|n]_r}(M)}{s_{[m|n]}(M)} \;\mapsto\; \frac{s_{[m|n]_r}(\mu,\nu)}{s_{[m|n]}(\mu,\nu)} := \sum_{1\le j_1<\dots<j_r\le n} (-q)^r\nu_{j_1}\dots\nu_{j_r} = e_r(-q\nu)\,, \quad 1\le r\le n \tag{1.84}$$

Здесь $e_k(\cdot)$ обозначает ограничение элементарной симметрической функции $e_k \in \Lambda$ до элементарного симметрического полинома от конечного числа переменных — аргументов $e_k(\cdot)$ в приведенных выше формулах. Кроме того, параметризационное отображение требует обратимости функции $s_{[m|n]}(M)$. Степени параметра q введены в формулы (1.83) – (1.84) с целью упрощения записи тождества (1.85).

Соотношения (1.83) и (1.84) задают гомоморфизм характеристической подалгебры $\mathrm{Char}(R,F)$ в подалгебру суперсимметрических полиномов от наборов переменных $\{q^{-1}\mu_i\}$ и $\{-q\nu_j\}$. Теперь нетрудно записать характеристический полином (1.45) в полностью факторизованном виде. С этой целью заметим, что параметризационное отображение естественным образом задает на алгебре $\mathbb{C}[\mu,\nu]$ структуру левого $\mathrm{Char}(R,F)$-модуля. Пользуясь этой структурой, построим *расширение* пространства квантовых матриц:

$$\overline{\mathrm{Pow}}(R,F) := \mathrm{Pow}(R,F) \underset{\mathrm{Char}(R,F)}{\otimes} \mathbb{C}[\mu,\nu]\,.$$

Квантовое матричное произведение в пространстве $\overline{\mathrm{Pow}}(R,F)$ дается формулой

$$(N \underset{\mathrm{Char}(R,F)}{\otimes} x)*(K \underset{\mathrm{Char}(R,F)}{\otimes} y) := (N*K) \underset{\mathrm{Char}(R,F)}{\otimes} (xy)\,, \quad \forall\, N,K\in \mathrm{Pow}(R,F)\,,\ \ \forall\, x,y \in \mathbb{C}[\mu,\nu]\,.$$

Это произведение ассоциативно и коммутативно.

Характеристические тождества (1.45) и (1.82) записаны в алгебре $\mathrm{Pow}(R,F)$. При переходе к расширенной алгебре $\overline{\mathrm{Pow}}(R,F)$ мы можем применить подстановки (1.83) и (1.84) к характеристическому полиному в тождестве (1.82) и полностью факторизовать его в произведение следующих сомножителей

$$(s_{[m|n]}(M)\, I)^{*2} * \prod_{i=1}^{m}(M-\mu_i I) * \prod_{j=1}^{n}(M-\nu_j I) \equiv 0\,. \tag{1.85}$$

Здесь все произведения понимаются в смысле квантового матричного умножения.

[6]Здесь мы дополнительно предполагаем алгебраическую независимость элементов $\frac{s_{[m|n]^k}(M)}{s_{[m|n]}(M)}$, $1\le k\le m$ и $\frac{s_{[m|n]_r}(M)}{s_{[m|n]}(M)}$, $1\le r\le n$.

Приведенная выше полностью факторизованная форма тождества Кэли-Гамильтона служит основанием для интерпретации наборов $\{\mu_i\}$ и $\{\nu_j\}$ как, соответственно, *"четных" и "нечетных" собственных значений квантовой суперматрицы* M.

Замечание 17 Заметим, что формулы параметризации (1.83)–(1.85) получены на формальном алгебраическом уровне. Другой подход, основанный на теории представлений соответствующих алгебр, был развит в работах [50, 28] (см., также, цитированную там литературу и работу [66]). Такой подход продуктивен для семейства RE алгебр, поскольку в этом случае характеристическая подалгебра принадлежит центру квантовой матричной алгебры (см., например, последнюю версию работы [43], раздел 3.2, предложение 5). Однако в случае общей квантовой матричной алгебры применение подобных методов весьма проблематично.

1.5.4 Спектральная параметризация характеристической подалгебры

Этот параграф завершает параметризацию характеристической подалгебры в терминах собственных значений квантовой суперматрицы M. С этой целью мы параметризуем генераторы характеристической подалгебры $s_{(1^k)}(M) = s_{[k|1]}(M)$ и $s_{(k)}(M) = s_{[1|k]}(M)$ и доказываем, что элементы характеристической подалгебры являются суперсимметрическими полиномами от собственных значений матрицы M. Этим проблема параметризации в принципе исчерпывается.

Завершается этот раздел выводом параметризационной формулы (1.93) для функции Шура $s_{[m|n]}(M)$, что позволяет переформулировать условие обратимости функции $s_{[m|n]}(M)$ в виде условия на спектральные значения $\{\mu_i\}_{1\leq i\leq m}$ и $\{\nu_j\}_{1\leq j\leq n}$. При доказательстве формулы (1.93) мы пользуемся еще одним набором билинейных соотношений в кольце симметрических функций Λ (лемма 15). Отметим, что соотношение (1.93) есть частный случай факторизационной формулы, известной в в теории суперсимметрических полиномов [2, 80].

Утверждение 18 *Пусть $\mathcal{M}(R,F)$ является квантовой матричной алгеброй $GL(m|n)$ типа. Тогда параметризационное отображение (1.83), (1.84) сопоставляет генераторам $\{s_{[k|1]}(M)\}_{k\geq 0}$ и $\{s_{[1|k]}(M)\}_{k\geq 0}$ характеристической подалгебры* $\mathrm{Char}(R,F)$

следующие полиномы от собственных значений квантовой суперматрицы M

$$s_{[k|1]}(M) \;\mapsto\; s_{[k|1]}(\mu,\nu) \;=\; \sum_{r=0}^{k} e_r(q^{-1}\mu)\, h_{k-r}(-q\nu)\,, \tag{1.86}$$

$$s_{[1|k]}(M) \;\mapsto\; s_{[1|k]}(\mu,\nu) \;=\; \sum_{r=0}^{k} e_r(-q\nu)\, h_{k-r}(q^{-1}\mu)\,. \tag{1.87}$$

Здесь $e_r(q^{-1}\mu) := \sum\limits_{1\le i_1<\dots<i_r\le m} q^{-r}\mu_{i_1}\mu_{i_2}\dots\mu_{i_r}$ *и* $h_r(-q\nu) := \sum\limits_{1\le i_1\le\dots\le i_r\le n} (-q)^r\nu_{i_1}\nu_{i_2}\dots\nu_{i_r}$ *являются элементарными симметрическими и полными симметрическими полиномами от m и n переменных соответственно ([65], раздел 1.2).*

Доказательство. Воспользуемся индукцией по индексу k. Правило Литтлвуда-Ричардсона (1.47) дает

$$s_{[m|n]}(M)\, s_{(1)}(M) = s_{[m|n]^1}(M) + s_{[m|n]_1}(M).$$

Поделив обе части этого равенства на $s_{[m|n]}(M)$ и воспользовавшись формулами (1.83), (1.84), мы приходим к параметризационной формуле для $s_{(1)}(M)$

$$s_{(1)}(\mu,\nu) = s_{[1|1]}(\mu,\nu) = e_1(q^{-1}\mu) + e_1(-q\nu)\,,$$

которая может быть тождественно переписана в виде

$$s_{[1|1]}(\mu,\nu) = e_1(q^{-1}\mu) + h_1(-q\nu)\,, \quad \text{или} \quad s_{[1|1]}(\mu,\nu) = e_1(-q\nu) + h_1(q^{-1}\mu)\,.$$

Эти выражения представляют собой частный случай формул (1.86) и (1.87) для $k = 1$ (первый шаг индукции).

Теперь, полагая соотношения (1.86) и (1.87) выполненными для всех значений индекса $1 \le k < p$, докажем их справедливость для $k = p$. Мы приведем подробное доказательство формулы (1.87). Формула (1.86) проверяется аналогично.

Воспользуемся следующим соотношением на функции Шура (доказательство см. в [34])

$$\sum_{i=0}^{\min\{p,m\}} (-1)^i s_{[1|p-i]}(M)\, s_{[m|n]^i}(M) \;=\; \theta(n-p)\, s_{[m|n]_p}(M)\,. \tag{1.88}$$

Здесь $\theta(i) := 0$ если $i < 0$ и $\theta(i) := 1$ в противном случае. Подставляя в (1.88) параметризованные выражения для $s_{[m|n]^i}(M)/s_{[m|n]}(M)$ и $s_{[m|n]_p}(M)/s_{[m|n]}(M)$ (см. (1.83) и (1.84)), приходим к равенству

$$s_{[1|p]}(\mu,\nu) = e_p(-q\nu) - \sum_{i=1}^{p} (-1)^i s_{[1|p-i]}(\mu,\nu)\, e_i(q^{-1}\mu). \tag{1.89}$$

Пользуясь предположением индукции для элементов $s_{[1|p-i]}(\mu,\nu)$, $1 \le i \le p$, выполним последовательные преобразования

$$\begin{aligned} s_{[1|p]}(\mu,\nu) &= e_p(-q\nu) - \sum_{j=0}^{p-1} e_j(-q\nu) \sum_{i=1}^{p-j} \big((-1)^i h_{p-j-i}(q^{-1}\mu)\, e_i(q^{-1}\mu)\big) \\ &= e_p(-q\nu) + \sum_{j=0}^{p-1} e_j(-q\nu)\, h_{p-j}(q^{-1}\mu) = \sum_{j=0}^{p} e_j(-q\nu)\, h_{p-j}(q^{-1}\mu) \quad (1.90) \end{aligned}$$

где при переходе ко второй строке были применены соотношения Вронского (см. [34])

$$\sum_{i=1}^{p-j} (-1)^i h_{p-j-i}(q^{-1}\mu)\, e_i(q^{-1}\mu) \;=\; -h_{p-j}(q^{-1}\mu)\,.$$

Формула (1.90) завершает индуктивное доказательство соотношения (1.87). □

Напомним теперь определение суперсимметрического полинома (см., например, работу [88]).

Определение 19 *Пусть $x = \{x_i\}_{1\le i\le m}$ и $y = \{y_j\}_{1\le j\le n}$ представляют собой два набора независимых коммутативных переменных. Полином $p \in \mathbb{C}[x,y]$ называется суперсимметрическим, если*

a) p инвариантен относительно перестановок переменных $x_1,\dots,x_m$;

b) p инвариантен относительно перестановок переменных $y_1,\dots,y_n$;

c) при подстановке в p $x_1 = y_1 = t$, результат не зависит от t.

Алгебра суперсимметрических полиномов в дальнейшем будет обозначаться символом $T[x,y]$.

Полиномы $s_{[k|1]}(\mu,\nu)$ и $s_{[1|k]}(\mu,\nu)$, определенные соотношениями (1.86) и (1.87), очевидным образом удовлетворяют условиям *a)* и *b)* определения 19 относительно переменных $x_i = q^{-1}\mu_i$ и $y_j = -q\nu_j$. Выполнение для них третьего условия *c)* вытекает из следующей леммы.

Лемма 20 *Введем обозначение для поднаборов переменных $\{\mu'\} := \{\mu\}\setminus\{\mu_1\} = \{\mu_i\}_{2\le i\le m}$, $\{\nu'\} := \{\nu\}\setminus\{\nu_1\} = \{\nu_i\}_{2\le j\le n}$. Для полиномов $s_{[1|k]}(\mu,\nu)$ и $s_{[k|1]}(\mu,\nu)$*

справедливы представления

$$s_{[1|k]}(\mu,\nu) \;=\; s_{[1|k]}(\mu',\nu') + (q^{-1}\mu_1 - q\nu_1)\sum_{r=0}^{k-1}\left(q^{-1}\mu_1\right)^{k-r-1} s_{[1|r]}(\mu',\nu')\,, \quad (1.91)$$

$$s_{[k|1]}(\mu,\nu) \;=\; s_{[k|1]}(\mu',\nu') + (q^{-1}\mu_1 - q\nu_1)\sum_{r=0}^{k-1}(-q\nu_1)^{k-r-1} s_{[r|1]}(\mu',\nu'). \quad (1.92)$$

Доказательство. Из определения элементарной и полной симметрических функций нетрудно получить следующие равенства

$$e_k(\mu) \,=\, e_k(\mu') + \mu_1\, e_{k-1}(\mu')\,, \qquad h_k(\mu) \,=\, \sum_{r=0}^{k}(\mu_1)^r\, h_{k-r}(\mu')\,.$$

Подставив эти соотношения в формулы (1.86) и (1.87) и проведя несложные преобразования, мы получим в результате (1.91) и (1.92). $\square$

Итак, мы доказали, что полиномы $s_{[k|1]}(\mu,\nu)$ и $s_{[1|k]}(\mu,\nu)$ являются суперсимметрическими. Кроме того, как было показано в работе [80] (см. там теорему (3.1) и предложение (2.3)), алгебра суперсимметрических полиномов $T[q^{-1}\mu,-q\nu]$ генерируется любым из наборов полиномов $\{s_{[1|k]}(\mu,\nu)\}_{k\ge 0}$ или $\{s_{[k|1]}(\mu,\nu)\}_{k\ge 0}$. Поэтому, пользуясь Утверждением 18, мы приходим к следующему заключению.

Следствие 21 *В условиях Утверждения 18 образ характеристической подалгебры* $\mathrm{Char}(R,F)$ *относительно параметризационного отображения (1.83), (1.84) совпадает с алгеброй* $T[q^{-1}\mu,-q\nu]$ *суперсимметрических полиномов от переменных* $\{q^{-1}\mu_i\}_{1\le i\le m}$ *и* $\{-q\nu_j\}_{1\le j\le n}$.

В заввершение этого параграфа, приведем явное выражение для параметризации функции Шура $s_{[m|n]}(M)$, поскольку этот элемент играет выделенную роль в наших построениях (в частности, формулы (1.83–1.84) предполагают его обратимость).

Утверждение 22 *Пусть* $\mathcal{M}(R,F)$ *является квантовой матричной алгеброй* $GL(m|n)$ *типа. Тогда образ функции Шура* $s_{[m|n]}(M)$ *относительно параметризационного отображения (1.83), (1.84) дается формулой*

$$s_{[m|n]}(M) \;\mapsto\; s_{[m|n]}(\mu,\nu) = \prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}\left(q^{-1}\mu_i - q\nu_j\right). \quad (1.93)$$

Следовательно, условие обратимости функции Шура $s_{[m|n]}(M)$ *равносильно обратимости всех множителей* $(q^{-1}\mu_i - q\nu_j)$ $1\le i\le m$, $1\le j\le n$ *в произведении (1.93).*

Доказательство. Умножим образ соотношений (1.76) в характеристической подалгебре $\mathrm{Char}(R,F)$ на элемент $(s_{[m|n]}(M))^{-1}$ и применим параметризационное отображение. В силу определений (1.83), (1.84) приходим к результату

$$s_{[m|n]}(\mu,\nu) = e_n(-q\nu)\, s_{[m-1|n]}(\mu,\nu) \,+\, e_m(q^{-1}\mu)\, s_{[m|n-1]}(\mu,\nu). \qquad (1.94)$$

Замечая, что

$$e_m(q^{-1}\mu)|_{\mu_i=0} = 0\,, \quad \forall\, i:\ 1 \le i \le m, \qquad e_n(-q\nu)|_{\nu_j=0} = 0\,, \quad \forall\, j:\ 1 \le j \le n,$$

мы получаем следующее свойство суперсимметрического полинома $s_{[m|n]}(\mu,\nu)$

$$s_{[m|n]}(\mu,\nu)|_{q^{-1}\mu_i=q\nu_j} = s_{[m|n]}(\mu,\nu)|_{\mu_i=\nu_j=0} = 0\,, \quad \forall i,j:\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n. \quad (1.95)$$

Из формул Якоби-Труди (1.72) непосредственно следует, что функция Шура $s_{[m|n]}(\mu,\nu)$ является однородным полиномом порядка $(m+n)$ от переменных $\{q^{-1}\mu_i\}_{1\le i\le m}$ и $\{q\nu_j\}_{1\le j\le n}$. Этот факт вместе с требованием суперсимметричности и свойством (1.95) определяет вид $s_{[m|n]}(\mu,\nu)$ с точностью до произвольного числового множителя

$$s_{[m|n]}(\mu,\nu) = \alpha \prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}\left(q^{-1}\mu_i - q\nu_j\right)\,. \qquad (1.96)$$

Для фиксации множителя α воспользуемся следствием параметризации (1.87)

$$s_{(k)}(\mu,\nu)|_{\mu_1=\dots=\mu_m=0} = e_k(-q\nu).$$

Тогда из представления Якоби-Труди для $s_{[m|n]}(M)$ вытекает

$$s_{[m|n]}(\mu,\nu)|_{\mu_1=\dots=\mu_m=0} = \det\Big(e_{n-i+j}(-q\nu)\Big)_{i,j=1}^{m} = \Big(e_n(-q\nu)\Big)^m = \Big(\prod_{i=1}^{n}(-q\nu_i)\Big)^m.$$

Сравнивая этот результат со значением выражения (1.96) в точке $\mu_1 = \dots = \mu_m = 0$, мы находим $\alpha = 1$ завершая, тем самым, все доказательство. $\square$

2 Теория представлений алгебры уравнения отражений

В данном разделе рассматривается теория конечномерных эквивариантных представлений алгебры уравнения отражений. Строится квазитензорная категория соответствующих модулей и показывается, что линейная оболочка $U = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(l^i_j)$

генераторов алгебры уравнения отражений может быть отождествлена с одним из объектов этой категории. Такое свойство позволяет определить действие генераторов алгебры на пространстве U — аналог присоединенного представления в теории алгебр Ли. Это представление играет важную роль в построении квантовых аналогов векторных полей на некоммутативных многообразиях.

2.1 Общая форма симметрии Гекке

Кособратимые геккевские R-матрицы или симметрии Гекке (см. Приложение A) задают перестановочные соотношения генераторов алгебры уравнения отражений и, тем самым, полностью определяют ее алгебраическую структуру. Этот подраздел диссертации посвящен проблеме классификации (кособратимых) симметрий Гекке. В основе классификации — теория алгебр Гекке серии A_{k-1} и их R-матричных представлений. Хороший обзор этих вопросов, как и многочисленные ссылки на оригинальные работы, можно найти в [73]. Для удобства читателя, в Приложении A собраны основные факты упомянутой теории, необходимые для понимания дальнейшего изложения.

Зафиксируем некоторую симметрию Гекке $R : V^{\otimes 2} \to V^{\otimes 2}$ и рассмотрим R-симметрическую $\Lambda_+(V)$ и R-кососимметрическую $\Lambda_-(V)$ алгебры пространства V, которые определяются как следующие фактор-алгебры свободной тензорной алгебры $T(V)$

$$\Lambda_\pm(V) := T(V)/\langle(\mathrm{Im}(q^{\pm 1}\, I_{12} \mp R_{12})\rangle, \qquad I_{12} = I \otimes I\,. \tag{2.1}$$

Символ $\langle J\rangle$ будет в дальнейшем обозначать двусторонний идеал в $T(V)$, порожденный подмножеством $J \subset T(V)$.

Составим далее ряд Гильберта-Пуанкаре алгебр $\Lambda_\pm(V)$:

$$P_\pm(t) := \sum_{k\ge 0} t^k\, \dim\, \Lambda^k_\pm(V)\,, \tag{2.2}$$

где $\Lambda^k_\pm(V) \subset \Lambda_\pm(V)$ есть однородные компоненты степени k.

Решающую роль в классификации возможных форм симметрий Гекке играет следующее утверждение.

Утверждение 23 *Пусть R есть произвольная симметрия Гекке, удовлетворяющая уравнениям* (A.22) *и* (A.23) *при некотором общем значении параметра q (см. условие* (A.5)*). Тогда имеют место следующие свойства рядов Гильберта-Пуанкаре:*

1. *Ряды Гильберта-Пуанкаре $P_{\pm}(t)$ связаны соотношением*

$$P_+(t)\,P_-(-t) = 1.$$

2. *Ряд Гильберта-Пуанкаре $P_-(t)$ (и следовательно $P_+(t)$) представляет собой рациональную функцию вида:*

$$P_-(t) = \frac{N(t)}{D(t)} = \frac{1 + a_1\,t + \ldots + a_m\,t^m}{1 - b_1\,t + \ldots + (-1)^n\,b_n\,t^n} = \frac{\prod_{i=1}^m (1 + x_i t)}{\prod_{j=1}^n (1 - y_j t)}\,, \qquad (2.3)$$

   где коэффициенты a_i и b_i есть натуральные числа, полиномы $N(t)$ и $D(t)$ взаимно просты и все вещественные числа x_i и y_i являются положительными.

3. *Если, кроме того, симметрия Гекке R кособратима, то полиномы $N(t)$ и $D(-t)$ являются возвратными*[7].

Первое утверждение из приведенного в Утверждении 23 списка было доказано в работе [25], второе и третье, соответственно, в работах [77, 11] и [15].

Определение 24 Пусть $R : V^{\otimes 2} \to V^{\otimes 2}$ есть кособратимая симметрия Гекке, и пусть натуральные числа m и n представляют собой, соответственно, степени многочленов $N(t)$ и $D(t)$ в числителе и знаменателе рациональной функции $P_-(t)$. Упорядоченную пару натуральных чисел $(m|n)$ будем называть *би-рангом* симметрии R. Если $n = 0$ (соответственно $m = 0$), симметрия Гекке будет называться *четной* (соответственно *нечетной*). Если обе компоненты би-ранга отличны от нуля, мы будем говорить, что симметрия R относится к общему типу.

Замечание 25 В свете Определения 24, любая кособратимая симметрия Гекке является обобщением супер-перестановки, для которой ряд Гильберта-Пуанкаре, как известно, имеет вид $P_-(t) = (1+t)^m(1-t)^{-n}$, где $m = \dim V_0$ и $n = \dim V_1$ — размерности четной и нечетной компонент супер-пространства. Такая трактовка симметрий Гекке мотивирована также и сходством соответствующих категорий Шура-Вейля (см. ниже).

[7]Напомним, что полином $p(t) = c_0 + c_1 t + \cdots + c_n t^n$ с вещественными коэффициентами c_i называется *возвратным*, если $p(t) = t^n p(t^{-1})$ или, эквивалентно, $c_i = c_{n-i}$, $0 \le i \le n$.

Обратимся теперь к некоторым важным следствиям Утверждения 23. Пусть симметрия Гекке R имеет би-ранг $(m|n)$. Как известно, с помощью симметрии R можно построить представления ρ_R алгебр Гекке $H_k(q)$ серии A_{k-1} (для $k \geq 2$) в однородных компонентах $V^{\otimes p} \subset T(V)$ для всех $p \geq k$:

$$\rho_R : \; H_k(q) \to \mathrm{End}(V^{\otimes p}), \quad p \geq k\,.$$

В явном виде эти представления приведены в Приложении A (см. формулу (A.24)).

В представлении ρ_R примитивные идемпотенты алгебры Гекке $e_a^\lambda \in H_k(q)$, $\lambda \vdash k$, превращаются в проекционные операторы

$$\rho_R(e_a^\lambda) = E_a^\lambda(R) \in \mathrm{End}\,(V^{\otimes p}), \quad p \geq k\,, \tag{2.4}$$

индекс a перечисляет все стандартные таблицы Юнга (λ, a), которые могут быть построены по данному разбиению λ натурального числа k. Общее число стандартных таблиц, соответствующих разбиению λ, будем обозначать символом d_λ.

Всякое пространство $V^{\otimes p}$, $p \geq 2$, может быть разложено в прямую сумму собственных подпространств приведенных выше проекторов

$$V^{\otimes p} = \bigoplus_{\mu \vdash p} \bigoplus_{a=1}^{d_\mu} V_{(\mu,a)}, \qquad V_{(\mu,a)} = \mathrm{Im}(E_a^\mu)\,. \tag{2.5}$$

В силу соотношений (A.13-A.14), проекторы E_a^μ, отличающиеся только значением индекса a, связаны обратимым преобразованием и, следовательно, все подпространства $V_{(\mu,a)}$ с фиксированным разбиением μ и различными значениями a изоморфны друг другу.

При значениях параметра q из общего положения алгебра Гекке $H_k(q)$ изоморфна групповой алгебре $\mathbb{K}[\mathfrak{S}_k]$ симметрической группы порядка k [95]. Опираясь на этот факт, мы можем доказать следующий результат [29, 77]:

$$V_{(\lambda,a)} \otimes V_{(\mu,b)} = \bigoplus_{\nu} \bigoplus_{d_{ab} \in I_{ab}} V_{(\nu,d_{ab})} \cong \bigoplus_{\nu} c^\nu_{\lambda\mu}\, V_{(\nu,d_0)}\,, \qquad \lambda \vdash p,\; \mu \vdash k,\; \nu \vdash (p+k), \tag{2.6}$$

где неотрицательные целые числа $c^\nu_{\lambda\mu}$ представляют собой коэффициенты Литтлвуда-Ричардсона (см. [65]), индекс d_{ab} таблиц Юнга принимает значения из некоторого подмножества $I_{ab} \subset \{1, 2, \dots, d_\nu\}$, которое зависит от значений исходных индексов a и b. Число d_0 в последнем равенстве относится к индексу *любой* фиксированной таблицы Юнга из множества (ν, d), $1 \leq d \leq d_\nu$. Смысл этого равенства состоит в следующем. Хотя слагаемые $V_{(\nu,d_{ab})}$ прямой суммы зависят от конкретных значений индексов a и b перемножаемых пространств, *общее* число этих слагаемых (количество элементов множества I_{ab}) от a и b не зависит, полностью определяется разбиениями λ, μ и ν и равно значению коэффициента Литтлвуда-Ричардсона $c^{\nu}_{\lambda\mu}$. Следовательно, благодаря упомянутому выше изоморфизму $V_{(\nu,d_{ab})} \cong V_{(\nu,d_0)}$, мы можем заменить сумму подпространств по индексу d_{ab} прямой суммой соответствующего числа $c^{\nu}_{\lambda\mu}$ копий пространства $V_{(\nu,d_0)}$ (см. [29]).

Примером подпространств $V_{(\lambda,a)}$ служат однородные компоненты $\Lambda^k_+(V)$ и $\Lambda^k_-(V)$ алгебр $\Lambda_\pm(V)$ (2.1). Они являются образами проекторов $E^{(k)}$ и $E^{(1^k)}$, отвечающих однострочным и одностолбцовым разбиениям (k) и (1^k) соответственно. Этот важный факт позволяет вычислить размерности над основным полем $\mathbb{K}$ всех пространств $V_{(\lambda,a)}$, при условии, что ряд Гильберта-Пуанкаре $P_-(t)$ известен. Поскольку все пространства $V_{(\lambda,a)}$, отвечающие одному разбиению λ изоморфны, мы будем обозначать их $\mathbb{K}$-размерности символом $\dim V_\lambda$.

Чтобы продвинуться дальше, нам будет необходимо приведенное ниже следствие Утверждения 23.

Следствие 26 *Пусть симметрия Гекке R имеет би-ранг $(m|n)$, и ряд Гильберта-Пуанкаре соответствующей алгебры $\Lambda_-(V)$ дается выражением* (2.3). *Тогда размерности подпространств $V_{(k)}$ и $V_{(1^k)}$, определяемых разбиениями (k) и (1^k) для всех $k \in \mathbb{N}$, задаются формулами*

$$\dim V_{(k)} = s_{(k)}(x|y) := \sum_{i=0}^{k} h_i(x) e_{k-i}(y), \tag{2.7}$$

$$\dim V_{(1^k)} = s_{(1^k)}(x|y) := \sum_{i=0}^{k} e_i(x) h_{k-i}(y)\,, \tag{2.8}$$

где h_i и e_i являются соответственно полной симметрической и элементарной симметрической функциями своих аргументов.

Доказательство. Мы докажем только первую из приведенных выше формул, поскольку доказательство второй формулы проводится совершенно аналогично.

Поскольку, как уже отмечалось выше, $V_{(k)} = \Lambda^k_+(V)$, то размерность пространства $V_{(k)}$ может быть найдена путем k-кратного дифференцирования ряда $P_+(t)$ в точке $t = 0$

$$\dim V_{(k)} = \frac{1}{k!}\,\frac{d^k}{dt^k} P_+(t)_{|_{t=0}}.$$

Пользуясь связью $P_+(t)P_-(-t) = 1$ (см. Утверждение 23) и соотношением (2.3), представим ряд $P_+(t)$ в виде

$$P_+(t) = \prod_{i=1}^{n}(1+y_i t)\prod_{j=1}^{m}\frac{1}{(1-x_j t)} = \mathcal{E}(y|t)\mathcal{H}(x|t),$$

где $\mathcal{E}(\cdot)$ и $\mathcal{H}(\cdot)$ обозначают производящие функции для элементарных и полных симметрических функций конечного числа соответствующих аргументов [65]:

$$e_k(y) = \sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n} y_{i_1}\dots y_{i_k} = \frac{1}{k!}\,\frac{d^k}{dt^k}\mathcal{E}(y|t)_{|t=0}$$
$$h_k(x) = \sum_{1\le j_1\le\dots\le j_k\le m} x_{j_1}\dots x_{j_k} = \frac{1}{k!}\,\frac{d^k}{dt^k}\mathcal{H}(x|t)_{|t=0}\,.$$

Вычисляя k-ю производную от $P_+(t)$ в точке $t=0$ с учетом этих соотношений, мы придем к равенству (2.7). $\square$

Отметим, что полиномы $s_{(k)}(x|y)$ и $s_{(1^k)}(x|y)$, определяемые равенствами (2.7) и (2.8), принадлежат классу так называемых супер-симметрических полиномов от наборов аргументов $\{x_i\}$ и $\{y_j\}$. По определению [88], полином $p(u|v)$ от двух наборов аргументов называется *супер-симметрическим*, если он симметрический относительно перестановок аргументов внутри наборов $\{u_i\}$ и $\{v_j\}$ и, кроме того, если спецификация $u_1 = v_1 = t$ приводит к результату, не зависящему от t. Полиномы $s_{(k)}(x|y)$ и $s_{(1^k)}(x|y)$, очевидно, удовлетворяют этому определению, если положить, например, $u = x$, $v = -y$ (прямое следствие так называемых соотношений Вронского).

Кроме того, набор полиномов $s_{(k)}(x|y)$ (соответственно $s_{(1^k)}(x|y)$) для всех $k \in \mathbb{N}$, является супер-симметрическим аналогом набора полных симметрических (соответственно элементарных симметрических) функций конечного числа переменных. В частности, набор таких полиномов генерирует все кольцо супер-симметрических полиномов, зависящих от переменных $\{x_i\}$ и $\{y_j\}$. Это кольцо обладает $\mathbb{Z}$-базисом, образованным супер-симметрическими функциями Шура $s_\lambda(x|y)$, которые выражаются в терминах генераторов $s_{(k)}(x|y)$ (или $s_{(1^k)}(x|y)$) посредством детерминантных тождеств Якоби-Труди [65].

Супер-симметрические функции Шура определяют значения размерностей $\dim V_\lambda$. Для формулировки соответствующего результата, нам необходимо еще одно определение.

Определение 27 ([2]) Зафиксировав произвольные целые числа $m \geq 0$ и $n \geq 0$, рассмотрим разбиения $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$, удовлетворяющие ограничению $\lambda_{m+1} \leq n$. Множество всех таких разбиений будем обозначать символом $\mathsf{H}(m, n)$ и любое разбиение $\lambda \in \mathsf{H}(m, n)$ из этого множества будем называть *крюком* типа $\mathsf{H}(m, n)$.

Утверждение 28 ([77]) *Пусть симметрия Гекке R имеет би-ранг $(m|n)$. Тогда размерности $\dim V_\lambda$ подпространств, входящих в разложение (2.5), определяются следующими правилами:*

1. *Для любого разбиения $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathsf{H}(m, n)$ размерность $\dim V_\lambda \neq 0$ и выражается формулой*
$$\dim V_\lambda = s_\lambda(x|y)\,. \tag{2.9}$$
Здесь
$$s_\lambda(x|y) = \det \|s_{(\lambda_i - i + j)}(x|y)\|_{1 \leq i,j \leq k}\,,$$
где при $k \geq 0$ супер-симметрическая функция $s_{(k)}(x|y)$ определяется выражением (2.7), а при $k < 0$ $s_{(k)} := 0$.

2. *Для произвольного разбиения λ имеем*
$$\dim V_\lambda = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda \notin \mathsf{H}(m, n)\,.$$

Доказательство. Принимая во внимание, что
$$\dim(U \otimes W) = \dim U \dim W, \qquad \dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W$$
и вычисляя размерности пространств в обеих частях равенства (2.6), находим
$$\dim V_\lambda \dim V_\mu = \sum_\nu c^\nu_{\lambda\mu} \dim V_\nu\,.$$
После этого доказываемый результат (2.9) непосредственно получается простым индуктивным рассуждением на основе Следствия 26 (подробности можно найти, например, в работе [34]).

Второе свойство, приведенное в условии Утверждения 28, вытекает из свойств супер-симметрических функций Шура $s_\lambda(x|y)$, установленных в [2] (см., также, работу [77]). □

В завершение раздела представим еще одну важную числовую характеристику симметрии Гекке, которая может быть выражена через ее би-ранг.

Утверждение 29 *Пусть кособратимая симметрия Гекке R имеет би-ранг $(m|n)$. Тогда*

$$\mathrm{Tr}\, B = \mathrm{Tr}\, C = q^{n-m}(m-n)_q\,. \tag{2.10}$$

Утветждение доказывается непосредственными достаточно громоздкими вычислениями, поэтому доказательство вынесено в Приложение А.

Следствие 30 *Для кособратимой симметрии Гекке, имеющей би-ранг $(m|n)$, числовой множитель ν в формуле* (А.30) *равен $q^{2(n-m)}$, то есть*

$$BC = CB = q^{2(n-m)} I\,.$$

Доказательство. Заметим, прежде всего, что если R есть кособратимая симметрия Гекке, то это же справедливо и в отношении оператора $R_{21} = PR_{12}P$. Поэтому

$$R_{21}^{-1} = R_{21} - (q-q^{-1})\, I_{21}\,.$$

Вычисляя $\mathrm{Tr}_{(2)}$ от обеих частей равенства $B_1\Psi_{12} = R_{21}^{-1}B_2$ (см. (А.32)), получаем

$$\begin{aligned} B_1C_1 \;&=\; \mathrm{Tr}_{(2)}\,(B_1\Psi_{12}) = \mathrm{Tr}_{(2)}(R_{21}^{-1}B_2) \\ &=\; \mathrm{Tr}_{(2)}((R_{21} - (q-q^{-1})\, I_{21})B_2) = I_1 - (q-q^{-1})\, I_1 \mathrm{Tr}_{R(()}B) = q^{2(n-m)}\, I_1. \quad \Box \end{aligned}$$

2.2 Квазитензорная категория $\mathrm{SW}(V_{(m|n)})$

В данном разделе строится квазитензорная категория векторных пространств, которую мы будем называть *категорией Шура-Вейля* и обозначать символом $\mathrm{SW}(V_{(m|n)})$. В этом обозначении отражен тот факт, что категория Шура-Вейля порождается векторным пространством V, связанным с кособратимой симметрией Гекке $R : V^{\otimes 2} \to V^{\otimes 2}$, имеющей би-ранг $(m|n)$. Объекты этой категории наделяются структурой модуля над алгеброй (модифицированного) уравнения отражений.

При построении категории $\mathrm{SW}(V_{(m|n)})$ мы будем следовать пути, изложенному в работе [29], где аналогичная категория была построена для четной симметрии Гекке би-ранга $(m|0)$. Отличительной особенностью четного случая является тот факт, что пространство V^*, дуальное к пространству V, можно отождествить с объектом $V_{(1^{m-1})}$ категории $\mathrm{SW}(V_{(m|0)})$ (определение пространств V_λ дано в (2.5)). Это свойство гарантирует жесткость категории Шура-Вейля в четном случае[8].

[8]Напомним, что (квази)тензорная категория векторных пространств называется *жесткой*, если вместе с любыми ее объектом U в классе объектов содержится и дуальный объект U^*, такой, что отображения $U \otimes U^* \to \mathbb{K}$ и $U^* \otimes U \to \mathbb{K}$ принадлежат классу морфизмов категории.

Для общего значения би-ранга $(m|n)$ данное свойство не выполняется, и мы вынуждены расширить категорию, добавляя дуальные ко всем ее объектам и определяя соответствующие левые и правые спаривания. Эта задача требует, в свою очередь, расширения категорных твистов на дуальные объекты и обеспечения инвариантности спариваний. Настоящий раздел посвящен решению этих проблем.

Итак, пусть кособратимая симметрия Гекке $R \in \mathrm{End}(V^{\otimes 2})$ имеет би-ранг $(m|n)$. Зафиксировав базисы $\{x_i\}$ и $\{x_i \otimes x_j\}$ в пространствах V и $V^{\otimes 2}$ соответственно, мы можем отождествить R с матрицей $\|R_{ij}^{kl}\|$:

$$R(x_i \otimes x_j) = R_{ij}^{kl}\, x_k \otimes x_l, \tag{2.11}$$

где нижние индексы нумеруют строки матрицы (в стандартном лексикографическом упорядочении), верхние индексы нумеруют столбцы, и всюду в дальнейшем по повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

Кроме того, введем дуальное векторное пространство V^* и зафиксируем в нем базис $\{x^i\}_{1\le i\le N}$, дуальный к базису $\{x_i\}$ по отношению к некоторой невырожденной билинейной форме

$$\langle\, ,\rangle_r :\ V \otimes V^* \to \mathbb{K}\,, \qquad \langle x_i, x^j\rangle_r = \delta_i^j\,. \tag{2.12}$$

Индекс r (от английского термина "right") относится к порядку следования аргументов в билинейной форме $\langle\, ,\,\rangle_r$: вектора дуального пространства V^* стоят справа от векторов пространства V.

По определению, дуальным пространством к тензорному произведению $U \otimes W$ будем считать пространство $W^* \otimes U^*$:

$$\langle U \otimes W, W^* \otimes U^*\rangle_r := \langle W, W^*\rangle_r \langle U, U^*\rangle_r\,.$$

Вследствие такого выбора, нумерация компонент тензорной степени $V^{*\otimes k}$ обратна нумерации компонент тензорной степени $V^{\otimes k}$:

$$V^{*\otimes k} := V_k^* \otimes \ldots V_2^* \otimes V_1^*\,, \qquad V^{\otimes k} := V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_k\,.$$

Данную особенность всегда следует иметь ввиду при работе с операторами, помеченными номерами тензорных компонент, в которых они действуют (как в формуле (1.1) и других аналогичных выражениях).

Расширим теперь твист (2.11) на пространство $V^* \otimes V^*$. Ниже будет показано, что требование согласованности этого расширения и инвариантности спаривания

(2.12) приводит к единственному выбору

$$R(x^i \otimes x^j) = x^r \otimes x^s\, R^{ji}_{sr}\,. \tag{2.13}$$

Таким образом, аналогично конструкциям раздела 2.1 мы можем задать представление алгебр Гекке $H_k(q)$ в тензорных степенях $V^{*\otimes k}$ для всех $k \in \mathbb{K}$, затем построить проекторы E^λ_a и ввести подпространства $V^*_{(\lambda,a)} \subset V^{*\otimes k}$ как образы действия этих проекторов на соответствующие тензорные степени пространства V^* (см. формулы (2.4)–(2.6)). Принимая во внимание сделанное выше замечание о нумерации компонент тензорных произведений, можно показать, что любой стандартной таблице Юнга (λ, a) соответствует единственная таблица Юнга (λ, a'), такая, что пространства $V_{(\lambda,a)}$ и $V^*_{(\lambda,a')}$ дуальны относительно билинейной формы (2.12).

По определению, класс объектов категории $\mathrm{SW}(V_{(m|n)})$ состоит из всех прямых сумм пространств вида $V_\lambda \otimes V^*_\mu$ и $V^*_\mu \otimes V_\lambda$, где λ и μ являются произвольными разбиениями неотрицательных целых чисел. Нулевое разбиение соответствует базисному пространству $V_0 := V$ или дуальному к нему $V^*_0 := V^*$. Числовое поле $\mathbb{K}$, над которым определены пространства V и V^*, также включается в класс объектов и играет роль единичного объекта нашей категории

$$\mathbb{K} \otimes V = V = V \otimes \mathbb{K}.$$

Обратимся к определению класса морфизмов категории $\mathrm{SW}(V_{(m|n)})$. Прежде всего, для любой пары объектов U и W мы должны задать твист $R_{U,W}$, реализующий изоморфизм $U \otimes W \cong W \otimes U$. Твисты вида R_{V_λ,V_μ} и $R_{V^*_\lambda,V^*_\mu}$ полностью определяются базовыми твистами $R_{V,V}$ и R_{V^*,V^*}, действие которых задано формулами (2.11) и (2.13). Поэтому нам осталось найти самосогласованные определения R_{V,V^*} и $R_{V^*,V}$, поскольку после этого твисты R_{V_λ,V^*_μ} и $R_{V^*_\lambda,V_\mu}$ могут быть построены на их основе посредством стандартных методов аналогично твистам R_{V_λ,V_μ} и $R_{V^*_\lambda,V^*_\mu}$ (см., например, [29]).

Условие самосогласованности определения R_{V,V^*} и $R_{V^*,V}$ состоит в следующем. После определения всех четырех базисных твистов, мы фактически получим линейный оператор на пространстве $(V \oplus V^*)^{\otimes 2}$. Наши определения твистов будут согласованы, если этот оператор будет удовлетворять квантовому уравнению Янга-Бакстера на пространстве $(V \oplus V^*)^{\otimes 3}$. Эта задача решается в приведенном ниже Утверждении 31. Отметим, что идея такого построения принадлежит В.Любашенко (см. работу [61] и содержащиеся в ней ссылки).

Утверждение 31 *Пусть оператор Ψ является кособратным к R-матрице R (см. определение* (A.26)). *Определим расширение R до линейного оператора*

$$R : (V \oplus V^*)^{\otimes 2} \to (V \oplus V^*)^{\otimes 2}$$

(сохранив для расширенного оператора то же самое обозначение) в соответствии с правилами

$$\begin{array}{lcl} V \otimes V^* \to V^* \otimes V & : & R(x_i \otimes x^j) = x^k \otimes x_l \, (R^{-1})_{ki}^{lj} \, , \\ V^* \otimes V \to V \otimes V^* & : & R(x^j \otimes x_i) = x_k \otimes x^l \, \Psi_{li}^{kj} \, , \\ V^* \otimes V^* \to V^* \otimes V^* & : & R(x^i \otimes x^j) = x^k \otimes x^l \, R_{lk}^{ji} \, , \\ V \otimes V \to V \otimes V & : & R(x_i \otimes x_j) = x_k \otimes x_l \, R_{ij}^{kl} \, . \end{array} \tag{2.14}$$

Тогда расширенный оператор R будет R-матрицей, заданной в пространстве $(V \oplus V^*)^{\otimes 2}$, то есть, будет решением уравнения Янга-Бакстера в пространстве $(V \oplus V^*)^{\otimes 3}$.

Доказательство. Поскольку R есть линейный оператор, то достаточно доказать справедливость сформулированного утверждения на базисных векторах пространства $(V \oplus V^*)^{\otimes 3}$. Это пространство, в свою очередь, разлагается в прямую сумму восьми подпространств от $V \otimes V \otimes V$ до $V^* \otimes V^* \otimes V^*$ и проверка справедливости утверждения на базисных векторах каждого из этих подпространств сводится к несложным вычислениям на основе формул (2.14). $\square$

Положим теперь по определению, что линейная комбинация, произведение, прямая сумма и тензорное произведение конечного числа категорных морфизмов также образуют морфизм нашей категории.

Далее, следуя [93], мы дополнительно потребуем, чтобы морфизмы обладали свойством естественности (функториальности). Это означает, что для любых двух морфизмов $f : U \to U'$ и $g : W \to W'$ должно выполняться следующее перестановочное правило

$$(g \otimes f) \circ R_{U,W} = R_{U',W'} \circ (f \otimes g) \, .$$

Отсюда вытекает необходимое условие того, что некоторое отображение $f : U \to U'$ является категорным морфизмом:

$$(\mathrm{id}_W \otimes f) \circ R_{U,W} = R_{U',W} \circ (f \otimes \mathrm{id_W}), \qquad (f \otimes \mathrm{id}_W) \circ R_{W,U} = R_{W,U'} \circ (\mathrm{id}_W \otimes f) \, . \tag{2.15}$$

Если отображение f удовлетворяет приведенному выше условию, мы будем называть его *R-инвариантным* отображением. Таким образом, любой морфизм категории $\mathrm{SW}(V_{(m|n)})$ должен быть R-инвариантным отображением.

Утверждение 32 *Пусть оператор R удовлетворяет соотношениям* (2.14). *Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Спаривание* (2.12) *является R-инвариантным.*

2. *Линейное отображение $\pi_r : \mathbb{K} \to V^* \otimes V$, порожденное соответствием*

$$1 \stackrel{\pi_r}{\mapsto} \sum_{i=1}^{N} x^i \otimes x_i\,, \tag{2.16}$$

также R-инвариантно.

Доказательство. При доказательстве утверждения 1 можно ограничиться рассмотрением простейшего случая формулы (2.15), полагая в ней $W = V$ или $W = V^*$. Эта возможность вытекает из структуры объектов категории $\mathrm{SW}(V_{(m|n)})$. Другими словами, мы должны проверить коммутативность следующей диаграммы отображений

$$\begin{array}{ccc} (V\otimes V^*)\otimes V^{\#} & \stackrel{(2.14)}{\longleftrightarrow} & V^{\#}\otimes(V\otimes V^*) \\ \langle\,,\rangle_r\otimes \mathrm{id}\,\downarrow & & \downarrow\,\mathrm{id}\otimes\langle\,,\rangle_r \\ \mathbb{K}\otimes V^{\#} & = & V^{\#}\otimes\mathbb{K}\,, \end{array} \tag{2.17}$$

где символ $V^{\#}$ обозначает пространство V, либо V^*. Коммутативность приведенной диаграммы прямо следует из формул (2.14), определений (2.12) и (A.26), а также определения обратной матрицы R^{-1}.

Далее, те же рассуждения позволяют свести доказательство второго утверждения, сформулированного в условии, к проверке коммутативности приведенной ниже диаграммы

$$\begin{array}{ccc} (V^*\otimes V)\otimes V^{\#} & \stackrel{(2.14)}{\longleftrightarrow} & V^{\#}\otimes(V^*\otimes V) \\ \pi_r\otimes \mathrm{id}\,\uparrow & & \uparrow\,\mathrm{id}\otimes\pi_r \\ \mathbb{K}\otimes V^{\#} & = & V^{\#}\otimes\mathbb{K}\,, \end{array}$$

что выполняется аналогично предыдущему случаю. $\square$

Замечание 33 Заметим, что R-инвариантность отображений (2.12) и (2.16) служит мотивировкой для расширения (2.14) исходного твиста R. Можно показать, что такое расширение единственно.

В дальнейшем наряду с правой билинейной формой (2.12) нам потребуется также и *левая* невырожденная билинейная форма

$$\langle\,,\rangle_l:\ V^*\otimes V\to\mathbb{K}\,,$$

причем левое спаривание тоже должно быть R-инвариантным. Это условие не позволяет нам просто положить $\langle x^i,x_j\rangle_l=\delta^i_j$, поскольку такое спаривание не будет R-инвариантным (немедленное следствие соотношений (2.14)).

Выберем форму $\langle\,,\rangle_l$ таким образом, чтобы обеспечить коммутативность следующей диаграммы

$$\begin{array}{ccc} V^*\otimes V & \stackrel{(2.14)}{\longrightarrow} & V\otimes V^* \\ \langle\,,\rangle_l\downarrow & & \downarrow\langle\,,\rangle_r \\ \mathbb{K} & = & \mathbb{K}\,. \end{array} \tag{2.18}$$

Несложное вычисление на основе (2.18) приводит к явному виду левой формы

$$\langle x^i,x_j\rangle_l=B^{\,i}_j\,, \tag{2.19}$$

где матрица $\|B^{\,i}_j\|$ определена в (А.27). Сделанный выбор гарантирует R-инвариантность левого спаривания $\langle\,,\rangle_l$. Коммутативность соответствующей диаграммы (сходной с диаграммой (2.17)) легко проверяется с помощью соотношений (2.14) и (А.32).

Замечание 34 Отметим, что обратная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} V^*\otimes V & \stackrel{(2.14)}{\longleftarrow} & V\otimes V^* \\ \langle\,,\rangle_l\downarrow & & \downarrow\langle\,,\rangle_r \\ \mathbb{K} & = & \mathbb{K}\,. \end{array} \tag{2.20}$$

не является коммутативной, если левое спаривание определено как в (2.19). В тензорной категории всегда можно определить левое спаривание таким образом, что обе диаграммы (2.18) и (2.20) будут коммутативны, тогда как в квазитензорном случае (к которому относится категория $\mathrm{SW}(V_{(m|n)})$) это невозможно. Данный факт является следствием неинволютивности оператора R: $R^2\neq I$.

В принципе, определяя левое спаривание мы могли бы потребовать коммутативности приведенной выше диаграммы, а не диаграммы (2.18). При таком выборе в правой части формулы (2.19) появился бы дополнительный числовой множитель $q^{2(m-n)}$. Однако, оба варианта являются эквивалентными и выбор между ними, фактически, дело вкуса.

Теперь мы можем найти в пространстве V^* другой базис $\{{}^i\!x\}_{1\le i\le N}$, который будет дуален базису $\{x_i\}_{1\le i\le n}$ пространства V относительно левой формы

$$ {}^i\!x := q^{2(m-n)} x^j\, C^i_j, \quad \Rightarrow \quad \langle {}^i\!x, x_j\rangle_l = \delta^i_j\,. \tag{2.21} $$

Нормировочный множитель в определении базисного вектора ${}^i\!x$ выбран в согласии со Следствием 30.

Итак, мы построили правую и левую R-инвариантные билинейные формы и нашли два базисных набора векторов $\{x^i\}$ и $\{{}^i\!x\}$ пространства V^*, которые дуальны базису $\{x_i\}$ пространства V по отношению к правой и левой формам соответственно (см. (2.12) и (2.21)). По этой причине мы будем называть вектора $\{x^i\}$ и $\{{}^i\!x\}$) соответственно *правым* и *левым* базисами пространства V^*.

Пользуясь формулами (A.32), перепишем соотношения (2.14) в терминах левого базиса.

Следствие 35 *В терминах левого базиса $\{{}^i\!x\}_{1\le i\le N}$ пространства V^* расширение твиста R, определяемое соотношениями* (2.14), *принимает следующий вид*

$$
\begin{aligned}
R(x_i\otimes {}^j\!x) &= {}^k\!x\otimes x_l\, \Psi^{jl}_{ik}\,,\\
R({}^j\!x\otimes x_i) &= x_k\otimes {}^l\!x\, (R^{\,-1})^{jk}_{il}\,,\\
R({}^i\!x\otimes {}^j\!x) &= {}^k\!x\otimes {}^l\!x\, R^{ji}_{lk}\,,\\
R(x_i\otimes x_j) &= x_k\otimes x_l\, R^{kl}_{ij}\,.
\end{aligned}
\tag{2.14$'$}
$$

Кроме того, линейное отображение $\pi_l : \mathbb{K}\to V\otimes V^*$, порожденное соответствием

$$ 1 \overset{\pi_l}{\mapsto} \sum_{i=1}^N x_i\otimes {}^i\!x\,, \tag{2.22} $$

является R-инвариантным.

Доказательство. Докажем только первую формулу из списка (2.14$'$), поскольку остальные доказываются совершенно аналогично.

Пользуясь определением левого базиса (2.21) и первой формулой из списка (2.14), получаем (напомним, что по повторяющимся матричным индексам проводится суммирование)

$$R(x_i \otimes {}^j x) = x^u \otimes x_l \, q^{2(m-n)} \, C_s^{\,j} (R^{-1})_{ui}^{ls} = {}^k x \otimes x_l \, q^{2(m-n)} C_s^{\,j} (R^{-1})_{ui}^{ls} B_k^{\,u} ,$$

где в последнем равенстве мы вернулись от правого базиса к левому с помощью формулы, обратной к (2.21):

$$x^u = {}^k x \, B_k^{\,u} \, .$$

Далее, формулы из второй строки соотношений (A.32) и Следствие 30 (нормировочный множитель) приводят к равенству

$$q^{2(m-n)} C_1 R_{21}^{-1} B_2 = \Psi_{12} \, ,$$

которое позволяет сделать следующую замену в приведенной выше цепочке тождественных преобразований

$$q^{2(m-n)} C_s^{\,j} \, (R^{-1})_{ui}^{ls} \, B_k^{\,u} = \Psi_{ik}^{\,jl} \, .$$

Итак, имеем окончательно

$$R(x_i \otimes {}^j x) = {}^k x \otimes x_l \, \Psi_{ik}^{\,jl} \, ,$$

что совпадает с формулой в первой строке списка ($2.14'$).

Доказательство R-инвариантности отображения π_l проводится непосредственными вычислениями на основе соотношений (2.14) или ($2.14'$) таким же образом, как и при доказательстве R-инвариантности отображения (2.16). $\square$

Теперь мы готовы определить класс морфизмов категории $\mathrm{SW}(V_{(m|n)})$. Вместе с тождественными отображениями объектов, класс морфизмов содержит отображения (2.12), (2.16), (2.19), (2.22) и (2.14) (или эквивалентную их форму ($2.14'$)). Кроме того, как уже говорилось выше, любая линейная комбинация, произведение (последовательное применение), тензорное произведение и прямая сумма конечного числа категорных морфизмов тоже образует категорный морфизм.

Замечание 36 Для конкретных операторов R множество всех R-инвариантных отображений может быть шире, чем приведенное выше множество категорных морфизмов. Например, для супер-пространства $V = V_0 \oplus V_1$ проекции $V \to V_0$ и $V \to V_1$ являются R-инвариантными отображениями.

В дальнейшем большое значение для нас будут иметь объекты вида $V^* \otimes V$ и $V \otimes V^*$, которые, как известно, изоморфны пространству $\mathrm{End}(V)$ всех эндоморфизмов пространства V. Фиксация базиса x_i в V, дает стандартный базис $h_i^j = x_i \otimes {}^j x$ в пространстве $V \otimes V^*$. Определяя обычным образом действие элемента $v \otimes v^* \in V \otimes V^*$ на вектор $u \in V$

$$(v \otimes v^*)(u) := v\langle v^*, u\rangle_l \,,$$

мы получим действие базисных элементов h_i^j в виде

$$h_i^j(x_k) = \delta_k^j \, x_i \,.$$

Отсюда легко следует таблица умножения элементов h_i^j, рассматриваемых как эндоморфизмы пространства V:

$$h_i^j \circ h_k^s = \delta_k^j \, h_i^s \,.$$

Выбрав в V^* правый базис $\{x^i\}$, мы получим другой базис $l_i^j = x_i \otimes x^j$ пространства $V \otimes V^*$, характеризуемый свойствами (см. (2.19))

$$l_i^i(x_k) = B_k^j \, x_i, \qquad l_i^j \circ l_k^s = B_k^j \, l_i^s \,. \tag{2.23}$$

Учитывая (2.21), находим связь двух базисных наборов

$$h_i^j = q^{2(m-n)} l_i^k \, C_k^j. \tag{2.24}$$

Введем в рассмотрение линейное отображение $\mathrm{Tr}_R : \mathrm{End}\,(V) \to \mathbb{K}$, заданное посредством категорного морфизма (2.12)

$$\mathrm{Tr}_R(l_j^i) = \langle x_j, x^i\rangle_r = \delta_j^i \,. \tag{2.25}$$

Это отображение будем называть *R-следом.* В силу соотношения (2.24), R-след произвольного оператора $\mathsf{F} \in \mathrm{End}\,(V)$ вычисляется по правилу

$$\mathrm{Tr}_R(\mathsf{F}) = q^{2(m-n)}\, \mathrm{Tr}(F \cdot C)\,, \tag{2.26}$$

где F есть матрица оператора F в базисе $\{x_i\}$.

В заключение раздела вычислим так называемые R-размерности объектов V_λ нашей категории. По определению, R-размерность объекта $V_\lambda \subset V^{\otimes k}$, $\lambda \vdash k$, дается формулой

$$\dim_R V_\lambda := \mathrm{Tr}_R(\mathrm{id}_{V_\lambda}) = q^{2k(m-n)} Tr_{(1\ldots k)}(C_1 \ldots C_k E_a^\lambda)\,. \tag{2.27}$$

Опираясь на формулы (A.13–A.14), можно показать, что данное определение не зависит от значения индекса a. Кроме того, R-размерность, как и классическая размерность, является аддитивно-мультипликативным функционалом на классе объектов категории

$$\dim_R(U\otimes W)=\dim_R U\dim_R W\,,\qquad \dim_R(U\oplus W)=\dim_R U+\dim_R W\,.$$

Определим R-аналоги $Q_\pm(t)$ рядов Гильберта-Пуанкаре $P_\pm(t)$ (2.2) по правилу

$$Q_\pm(t)=\sum_{k\ge 0}t^k\,\dim_R\Lambda^k_\pm(V)\,.$$

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 37 *Пусть кософбратимая симметрия Гекке имеет би-ранг $(m|n)$. Тогда соответствующие ей ряды $Q_\pm$ обладают следующими свойствами:*

1. *Если $m-n=0$, то $\dim_R V_\lambda=0$ для всех $\lambda\neq 0$ и, следовательно, $Q_+(t)=Q_-(t)=1$.*

2. *Если $m-n>0$, то*

$$\dim_R V_\lambda=\dim_R V^*_\lambda=s_\lambda(q^{m-n-1},q^{m-n-3},...,q^{1-m+n}),$$

и, следовательно,

$$Q_-(t)=\sum_{k=0}^{m-n}\binom{m-n}{k}_q t^k,\qquad \binom{p}{k}_q:=\frac{p_q(p-1)_q\dots(p-k+1)_q}{k_q(k-1)_q\dots 2_q1_q}\,.$$

3. *Если $m-n<0$, то*

$$\dim_R V_\lambda=\dim_R V^*_\lambda=s_{\lambda^*}(q^{n-m-1},q^{n-m-3},...,q^{1-n+m})\,,$$

где разбиение λ^* сопряжено к λ, и, следовательно,

$$Q_+(t)=\sum_{k=0}^{n-m}\binom{n-m}{k}_q t^k\,.$$

Доказательство. Утверждение доказывается прямыми вычислениями на основе определения (2.27). Вычисления полностью аналогичны случаю четной симметрии Гекке (см., например, [29]). □

Подчеркнем, что ряды $Q_\pm(t)$ зависят только от би-ранга данной симметрии Гекке R, тогда как соответствующие ряды Гильберта-Пуанкаре $P_\pm(t)$ существенно зависят от конкретной формы этой симметрии.

2.3 Деформационные свойства алгебры модифицированного уравнения отражений

Если R представляет собой инволютивную ($R^2 = I$) кособратимую R-матрицу, то в пространстве $\mathrm{End}\,(V)$ можно ввести структуру *обобщенной алгебры Ли* [24, 26]. Соответствующая обертывающая алгебра $U_R(\mathrm{End}\,(V))$ определяется как фактор-алгебра

$$U_R(\mathrm{End}\,(V)) = T(\mathrm{End}\,(V))/\langle \mathcal{J}_R \rangle\,, \tag{2.28}$$

где $\langle \mathcal{J}_R \rangle$ является двусторонним идеалом свободной тензорной алгебры $T(\mathrm{End}\,(V))$, порожденным подмножеством $\mathcal{J}_R \subset T(\mathrm{End}\,(V))$ следующего вида

$$\mathcal{J}_R = \{X \otimes Y - R_{\mathrm{End}}\,(X \otimes Y) - X \circ Y + \circ R_{\mathrm{End}}\,(X \otimes Y) \mid \forall X, Y \in \mathrm{End}\,(V)\}\,. \tag{2.29}$$

Здесь символ $\circ$ обозначает операцию умножения в ассоциативной алгебре $\mathrm{End}\,(V)$ всех линейных операторов на пространстве V. Линейный оператор $R_{\mathrm{End}} : \mathrm{End}\,(V)^{\otimes 2} \to \mathrm{End}\,(V)^{\otimes 2}$ является расширением оператора R на пространство $\mathrm{End}\,(V)^{\otimes 2}$. Явный вид R_{End} может быть получен с использованием соотношений (2.14).

С этой целью мы фиксируем базис $l_j^i = x_j \otimes x^i$ в пространстве $\mathrm{End}\,(V)$ и применяем формулы (2.14) для перестановки двух произвольных базисных элементов

$$R_{\mathrm{End}}\,(l_j^i \otimes l_s^k) = l_{b_1}^{a_1} \otimes l_{b_2}^{a_2}\,(R^{\,-1})_{a_1 c_2}^{b_2 c_1}\, R_{j r_1}^{\,b_1 c_2}\, R_{a_2 c_1}^{\,k r_2}\, \Psi_{r_2 s}^{\,r_1 i}\,. \tag{2.30}$$

В компактных матричных обозначениях эта формула имеет более прозрачный вид:

$$R_{\mathrm{End}}\,(L_{\bar 1} \otimes L_{\bar 2}) = L_{\bar 2} \otimes L_{\bar 1}\,, \tag{2.31}$$

где матричные копии $L_{\bar 1}$ и $L_{\bar 2}$ задаются формулами

$$L_{\bar 1} = L \otimes I, \quad L_{\bar 2} = R_{12} L_{\bar 1} R_{12}^{-1}. \tag{2.32}$$

Заметим, однако, что прямое обобщение соотношений (2.28–2.29) с определением (2.31) от инволютивной симметрии на случай произвольной симметрии Гекке приводит к алгебре с неудовлетворительными деформационными свойствами и бедной теорией представлений. Тем не менее, для любой кособратимой симметрии Гекке R существует другой путь обобщения обертывающей алгебры $U_R(\mathrm{End}\,(V))$ (2.28), который приводит к результату с хорошими деформационными свойствами (Утверждение 42) и совпадает с обертывающей алгеброй (2.28), если R — инволютивная симметрия.

Определение 38 Ассоциативную алгебру с единичным элементом $e_{\mathcal{L}}$ и генераторами l_i^j, $1 \le i, j \le N$, удовлетворяющими перестановочным соотношениям

$$R_{12}L_1R_{12}L_1 - L_1R_{12}L_1R_{12} - \hbar(R_{12}\,L_1 - L_1\,R_{12}) = 0\,, \tag{2.33}$$

где $L_1 = L \otimes I$, $L = \|l_i^j\|$, будем называть алгеброй уравнения отражений, если $\hbar = 0$, и алгеброй модифицированного уравнения отражений, если $\hbar \neq 0$. Для алгебры уравнения отражений примем обозначение $\mathcal{L}(R_q)$, для модифицированного варианта — $\mathcal{L}(R_q, \hbar)$.

Замечание 39 Отметим, что совершив линейное преобразование набора генераторов $l_i^j \mapsto m_i^j$ (при $q \neq \pm 1$) вида

$$M = Ie_{\mathcal{L}} - \frac{(q - q^{-1})}{\hbar}\,L, \quad M = \|m_i^j\|\,,$$

мы получим следующую форму перестановочных соотношений (2.33):

$$R_{12}M_1R_{12}M_1 - M_1R_{12}M_1R_{12} = 0\,. \tag{2.34}$$

Это означает, что алгебры $\mathcal{L}(R_q, \hbar)$ и $\mathcal{L}(R_q)$ изоморфны для всех значений параметра $q \neq \pm 1$. Базис генераторов с перестановочными соотношениями (2.33) более удобен при трактовке алгебры модифицированного уравнения отражений как аналога универсальной обертывающей алгебры $U(gl(m|n))$.

Докажем теперь, что перестановочные соотношения (2.33) согласованы со структурой категории $\mathrm{SW}(V_{(m|n)})$ в следующем смысле. Алгебра модифицированного уравнения отражений является фактором тензорной алгебры $T(V \otimes V^*)$ по двустороннему идеалу, порожденному матричными элементами соотношения (2.33) или, что эквивалентно, (2.34). Перестановочные соотношения будут согласованы со структурой категории, если соответствующий двусторонний идеал будет инвариантен по отношению к действию твистов категории. В этом случае мы будем говорить, что перестановочные соотношения алгебры модифицированного уравнения отражений являются *R-инвариантными.*

Утверждение 40 *Перестановочные соотношения* (2.33) *R-инвариантны.*

Доказательство. Для доказательства утверждения достаточно показать, что соотношения (2.33), порождающие идеал, сохраняются при их коммутации с пространствами V и V^* под действием твистов категории $\mathrm{SW}(V_{(m|n)})$. Это легко проверить непосредственными вычислениями на основе формул (2.14) и соответствия

$l_i^j = x_i \otimes x^j$. В целях упрощения выкладок удобнее работать с базисом генераторов m_i^j (2.34).

Например, фиксируя произвольный базисный вектор $x_i \in V$ и применяя соотношения (2.14), получаем следующее равенство:

$$\mathsf{R}(x_{i_1} \otimes m_{i_2}^{j_2}) = R_{i_1 i_2}^{a_1 a_2} m_{a_1}^{b_1} (R^{-1})_{b_1 a_2}^{c_1 j_2} \otimes x_{c_1} \quad \text{или} \quad \mathsf{R}(x_1 \otimes M_2) = R_{12} M_1 R_{12}^{-1} \otimes x_1\,,$$

где символ R будет обозначать твист общего вида, форма которого определяется контекстом конкретной формулы. Например, в рассматриваемом случае $\mathsf{R} = R_{V,V\otimes V^*}$.

Теперь, применяя дважды приведенное выше равенство, мы сразу получаем желаемый результат:

$$x_1 \otimes (R_{23} M_2 R_{23} M_2 - M_2 R_{23} M_2 R_{23}) \stackrel{\mathsf{R}}{\to}$$
$$R_{12} R_{23} (R_{12} M_1 R_{12} M_1 - M_1 R_{12} M_1 R_{12}) R_{23}^{-1} R_{12}^{-1} \otimes x_1\,.$$

Коммутативность с пространством V^* проверяется аналогично. $\square$

Утверждение 41 *Пусть R является инволютивной кособратимой симметрией. Тогда перестановочные соотношения между генераторами $\{l_i^j\}$ алгебры $U_R(\mathrm{End}\,(V))$ (2.28) эквивалентны соотношениям (2.33) при $\hbar = 1$. Следовательно, согласно Определению 38, алгебра (2.28) совпадает с алгеброй $\mathcal{L}_q(R, 1)$ модифицированного уравнения отражений.*

Доказательство. В инволютивном случае имеем по определению $R = R^{-1}$. Следовательно, матрица $L_{\overline{2}}$ (см. (2.32)) может быть записана как $L_{\overline{2}} = R_{12} L_1 R_{12}$. Это позволяет переписать действие оператора R_{End}, заданное соотношением (2.31), в новой форме:

$$R_{\mathrm{End}}\,(L_1 \otimes R_{12} L_1 R_{12}) = R_{12} L_1 R_{12} \otimes L_1\,.$$

Теперь, полагая в определении (2.29) $X = L_1$, $Y = R_{12} L_1 R_{12}$ и принимая во внимание таблицу умножения генераторов l_i^j (2.23), получаем

$$X \circ Y = L_1 R_{12}\,, \qquad \circ R_{\mathrm{End}}\,(X \otimes Y) = R_{12} L_1\,.$$

Вместе с выписанной выше новой формой записи для действия оператора R_{End} эти выражения приводят множество $\mathcal{J}_R$ (2.29) к виду (2.33) с $\hbar = 1$. $\square$

Основное деформационное свойство алгебры модифицированного уравнения отражений сформулировано в следующем утверждении.

Утверждение 42 *Пусть R есть кособратимая инволютивная симметрия Гекке $R^2 = I$, а $U \subset \mathbb{K}$ — некоторая окрестность единицы в поле $\mathbb{K}$: $1 \in U$. Рассмотрим семейство кособратимых симметрий Гекке R_q, аналитически зависящих от $q \in U$ и удовлетворяющих граничному условию $R_1 = R$. Обозначим однородную компоненту k-го порядка алгебры $\mathcal{L}(R_q)$ символом $\mathcal{L}^{(k)}(R_q)$. Тогда, при условии, что q находится в общем положении, выполнены следующие утверждения.*

1. $$\dim\, \mathcal{L}^{(k)}(R_q) = \dim\, \mathcal{L}^{(k)}(R), \qquad \forall\, k \geq 0\,.$$

2. $$\mathrm{Gr}\,\mathcal{L}(R_q, \hbar) \cong \mathcal{L}(R_q)\,,$$

   где $\mathrm{Gr}\,\mathcal{L}(R_q, \hbar)$ есть градуированная алгебра, ассоциированная с фильтрованной алгеброй $\mathcal{L}(R_q, \hbar)$.

Доказательство. Проверка утверждения 1 основана на следующем наблюдении. Ниже будет построен проекционный оператор $\mathcal{S}^{(3)} : (\mathrm{Span}(l_i^j))^{\otimes 3} \to \mathcal{L}^{(3)}(R_q)$. Явная форма этого проектора позволяет заключить, что его ранг не зависит от значений параметра $q \in U$ (в общем положении). Следовательно,

$$\dim\, \mathcal{L}^{(3)}(R_q) = \dim\, \mathcal{L}^{(3)}(R)\,. \tag{2.35}$$

В случае инволютивной симметрии R алгебра $\mathcal{L}(R)$ является симметрической алгеброй линейного пространства $\mathrm{Span}(l_i^j)$, на которой действует твист R_{End}. Эта алгебра является Кошулевой[9]. Кошулево свойство алгебры $\mathcal{L}(R)$ непосредственно вытекает из точности некоторого комплекса Кошуля второго рода, построенного для этой алгебры в работе [23].

Теперь достаточно применить результаты [78], обобщающие работу [10], из которых следует, что Кошулево свойство алгебры $\mathcal{L}(R)$ вместе с равенством (2.35) в однородных компонентах третьей степени влечет выполнение аналогичных равенств во всех старших однородных компонентах, что и составляет содержание первого пункта нашего Утверждения. Более того, можно показать, что для общих значений параметра $q \in U$ алгебра $\mathcal{L}(R_q)$ также является Кошулевой.

Для доказательства второго пункта формулировки Утверждения рассмотрим отображение $[\ ,\ ]$, сопоставляющее левой части выражения (2.33) его правую часть. Как показано в работе [26], такое отображение удовлетворяет соотношению Якоби в форме, предложенной в [78]. Следовательно, обобщая теорему о базисе Пуанкаре-Биркгофа-Витта из [78] (см. также работу [5]), мы придем к утверждению 2. $\square$

[9]Определение этого понятия можно найти, например, в [78].

Замечание 43 Отметим, что семейство кособратимых симметрий Гекке с нестандартными рядами Гильберта-Пуанкаре, построенное по методам работы [23], аналитически зависит от параметра q в некоторой окрестности 1.

Приступим теперь к конструированию проектора $\mathcal{S}^{(3)}$, упомянутого в доказательстве Утверждения 42. Представим перестановочные соотношения алгебры уравнения отражений $\mathcal{L}(R_q)$ ((2.33) при $\hbar = 0$) в эквивалентной форме

$$R_{12}L_{\overline{1}}L_{\overline{2}} - L_{\overline{1}}L_{\overline{2}}R_{12} = 0\,. \tag{2.36}$$

Замечание 44 Пользуясь уравнением Янга-Бакстера (A.22) на R легко показать, что аналогичное соотношение верно для матричных “копий” $L_{\overline{k}} = R_{k-1}L_{\overline{k-1}}\,R^{-1}_{k-1}$ матрицы L

$$R_kL_{\overline{k}}\,L_{\overline{k+1}} = L_{\overline{k}}\,L_{\overline{k+1}}\,R_k. \tag{2.37}$$

Рассмотрим ассоциативную алгебру $\mathfrak{L}$ с единицей, свободно порожденную над полем $\mathbb{K}$ генераторами l_i^j

$$\mathfrak{L} = \mathbb{K}\langle l_i^j\rangle \quad 1 \le i, j \le N\,.$$

Алгебра уравнения отражений $\mathcal{L}(R_q)$ является фактором алгебры $\mathfrak{L}$ по двустороннему идеалу $\langle\mathcal{I}_-\rangle$, порожденному левой частью соотношений (2.36)

$$\mathcal{L}(R_q) = \mathfrak{L}/\langle\mathcal{I}_-\rangle, \qquad \mathcal{I}_- = L_{\overline{1}}L_{\overline{2}} - R_{12}L_{\overline{1}}L_{\overline{2}}R_{12}^{-1}\,. \tag{2.38}$$

Как (бесконечномерное) векторное пространство алгебра $\mathfrak{L}$ может быть разложена в прямую сумму однородных компонент

$$\mathfrak{L} = \bigoplus_{k\ge 0}\mathfrak{L}_k, \quad \mathfrak{L}_0 \cong \mathbb{K}\,,$$

где каждая компонента $\mathfrak{L}_k$ есть линейная оболочка всех мономов k-го порядка по генераторам l_i^j.

Введем удобный базис в однородных компонентах

$$\mathfrak{L}_k = \mathrm{Span}[L_{\overline{1}}L_{\overline{2}}\dots L_{\overline{k}}]\,. \tag{2.39}$$

Приведенная выше формула означает, что подпространство $\mathfrak{L}_k$ есть линейная оболочка матричных элементов стоящей в правой части матрицы.

Для алгебры уравнения отражений $\mathcal{L}(R_q)$ имеется аналогичное разложение в прямую сумму векторных пространств

$$\mathcal{L}(R_q) = \bigoplus_{k\ge 0} \mathcal{L}_k, \quad \mathcal{L}_0 \cong \mathbb{K}, \quad \mathcal{L}_k \subset \mathfrak{L}_k\,.$$

Приведем явную конструкцию для компонент $\mathcal{L}_k$. Другими словами, найдем набор проекционных операторов $\mathcal{S}_k : \mathfrak{L}_k \to \mathfrak{L}_k$ со следующим свойством

$$\operatorname{Im}\mathcal{S}_k = \mathcal{L}_k \subset \mathfrak{L}_k\,.$$

Мы построим такие проекторы для однородных компонент второй и третьей степени $\mathcal{L}_k$, $k = 2, 3$.

Введем в рассмотрение линейный оператор $Q : \mathfrak{L}_2 \to \mathfrak{L}_2$, действующий по следующему правилу:

$$Q(L_{\overline{1}}L_{\overline{2}}) := \bar{R}_1 L_{\overline{1}}L_{\overline{2}}\bar{R}_1^{-1} \tag{2.40}$$

или, в сокращенном виде, $Q = \bar{R}_1 \circ \bar{R}_1^{-1}$. Поскольку симметрия $\bar{R}$ удовлетворяет уравнению Янга-Бакстера, это же справедливо и в отношении оператора Q

$$Q_1Q_2Q_1 = Q_2Q_1Q_2\,, \tag{2.41}$$

где $Q_1 = Q\otimes\mathrm{id}$ и $Q_2 = \mathrm{id}\otimes Q$ есть очевидные расширения оператора Q на линейное пространство $\mathfrak{L}_3$.

Далее, пользуясь условием Гекке (A.23) для симметрии R, находим минимальный полином линейного оператора Q

$$(Q + q^2\,\mathbf{I})(Q + q^{-2}\,\mathbf{I})(Q - \mathbf{I}) = 0, \quad \mathbf{I} := I\circ I\,. \tag{2.42}$$

Соотношение (2.42) показывает, что оператор Q полупростой и имеет три собственных значения на пространстве $\mathfrak{L}_2$. Применяя очевидные обозначения, мы получаем следующее разложение векторного пространства $\mathfrak{L}_2$ в прямую сумму собственных подпространств оператора Q:

$$\mathfrak{L}_2 = \mathfrak{L}^{(-q^2)} \oplus \mathfrak{L}^{(1)} \oplus \mathfrak{L}^{(-q^{-2})}\,.$$

Условие Гекке (A.23) позволяет построить явные выражения для соответствующих проекторов

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^{(-q^2)} &= P_+(R)\circ P_-(R)\\
\mathcal{P}^{(-q^{-2})} &= P_-(R)\circ P_+(R)\\
\mathcal{P}^{(1)} &= P_+(R)\circ P_+(R) + P_-(R)\circ P_-(R)\,,
\end{aligned} \tag{2.43}$$

где

$$P_{\pm}(R) = \frac{q^{\mp 1} I \pm \bar{R}}{2_q}\,.$$

Действительно, несложное вычисление показывает, что

$$Q\mathcal{P}^{(a)} = \mathcal{P}^{(a)}Q = a\,\mathcal{P}^{(a)}, \quad a = -q^{\pm 2},\, 1\,,$$

и операторы $\mathcal{P}^{(a)}$ образуют полный набор ортонормированных проекторов на пространстве $\mathfrak{L}_2$:

$$\mathcal{P}^{(a)}\mathcal{P}^{(b)} = \delta^{ab}\,\mathcal{P}^{(a)}, \qquad \mathcal{P}^{(-q^2)} + \mathcal{P}^{(1)} + \mathcal{P}^{(-q^{-2})} = \mathbf{I}\,.$$

Заметим, что соотношение (2.36) означает, что

$$(Q - \mathbf{I})(L_{\bar{1}}L_{\bar{2}}) = 0.$$

Таким образом, однородная компонента второго порядка $\mathcal{L}_2$ алгебры уравнения отражений совпадает (как векторное пространство) с собственным подпространством $\mathfrak{L}^{(1)} \subset \mathfrak{L}_2$ оператора Q, отвечающим собственному значению 1.

Рассмотрим пару ортонормированных проекторов на $\mathfrak{L}_2$

$$\mathcal{S} := \mathcal{P}^{(1)}, \quad \mathcal{A} := \mathcal{P}^{(-q^2)} + \mathcal{P}^{(-q^{-2})}, \quad \mathcal{S}\mathcal{A} = \mathcal{A}\,\mathcal{S} = 0, \quad \mathcal{S} + \mathcal{A} = \mathbf{I}.$$

Эти операторы можно выразить через степени оператора Q

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \frac{1}{2_q^2}\left((q^2 + q^{-2})\,\mathbf{I} + Q + Q^{-1}\right)\,, \\ \mathcal{A} &= \frac{1}{2_q^2}\left(2\,\mathbf{I} - Q - Q^{-1}\right)\,, \end{aligned} \tag{2.44}$$

где обратный оператор Q^{-1} находится из соотношения (2.42)

$$Q^{-1} = Q^2 + (q^2 - 1 + q^{-2})Q - (q^2 - 1 + q^{-2})\mathbf{I}\,.$$

Можно показать, что имеет место следующее равенство векторных подпространств в $\mathfrak{L}_2$

$$\mathrm{Span}(\mathcal{I}_-) = \mathrm{Im}\,\mathcal{A}\,,$$

где множество $\mathcal{I}_-$ определено в (2.38).

Приведенные выше соображения служат доказательством следующего утверждения.

Утверждение 45 *Однородная компонента второго порядка $\mathcal{L}_2$ алгебры уравнения отражений $\mathcal{L}(R_q)$ совпадает (как векторное пространство) с образом проектора $\mathcal{S}$*

$$\mathcal{L}_2 = \mathrm{Im}\,\mathcal{S} = \mathfrak{L}_2/\mathrm{Im}\,\mathcal{A}. \tag{2.45}$$

Обратимся теперь к проблеме нахождения проектора на однородную компоненту $\mathcal{L}_3 \subset \mathfrak{L}_3$ третьего порядка алгебры уравнения отражений $\mathcal{L}(R_q)$.

Расширим действие проекторов $\mathcal{S}$ и $\mathcal{A}$ на подпространство $\mathfrak{L}_3$. Проектору $\mathcal{S}$ сопоставим два оператора $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$ по правилу (см. определение (2.43))

$$\mathcal{S}_1 := \mathcal{P}^{(1)}(R_1), \qquad \mathcal{S}_2 := \mathcal{P}^{(1)}(R_2)\,,$$

что означает следующее действие этих операторов на подпространстве $\mathfrak{L}_3$

$$\mathcal{S}_1(xyz) := (\mathcal{S}(xy))z, \qquad \mathcal{S}_2(xyz) := x(\mathcal{S}(yz)), \qquad \forall\, xyz \in \mathfrak{L}_3\,.$$

Формулы для расширения $\mathcal{A}$ аналогичны.

На данном этапе проявляются все преимущества использования специального базиса (2.39). Действительно, *квадратичная* однородная компонента $\mathcal{L}_2$ может быть вложена в подпространство $\mathfrak{L}_3$ различными путями, но два приведенных ниже способа наиболее важны для дальнейшего рассмотрения:

$$\mathcal{L}_2 \cdot \mathfrak{L}_1 \subset \mathfrak{L}_3 \quad \text{и} \quad \mathfrak{L}_1 \cdot \mathcal{L}_2 \subset \mathfrak{L}_3\,.$$

Как следует из (2.36), (2.37) и Утверждения 45, эти вложения могут быть отождествлены с образами операторов $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$:

$$\mathcal{L}_2 \cdot \mathfrak{L}_1 = \mathcal{S}_1(\mathfrak{L}_3)\,, \qquad \mathfrak{L}_1 \cdot \mathcal{L}_2 = \mathcal{S}_2(\mathfrak{L}_3)\,.$$

Следующая лемма играет ключевую роль во всей конструкции.

Лемма 46 *Проекционный оператор $\mathcal{S}$ удовлетворяет следующему соотношению пятого порядка на подпространстве $\mathfrak{L}_3$:*

$$\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2\mathcal{S}_1 - a\,\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2\mathcal{S}_1 + b\,\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2 - a\,\mathcal{S}_2\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2 + b\,\mathcal{S}_2\,, \tag{2.46}$$

где

$$a = (q^4 + q^2 + 4 + q^{-2} + q^{-4})/2_q^4 \quad b = 4_q^2/2_q^8\,. \tag{2.47}$$

Доказательство. Лемма доказывается непосредственными вычислениями. Вычисления значительно упрощаются, если для оператора $\mathcal{S}$ пользоваться выражением (2.44) вместо исходного определения (2.43). $\square$

Зададим линейный оператор $\mathcal{S}^{(3)} : \mathfrak{L}_3 \to \mathfrak{L}_3$ следующим выражением

$$\mathcal{S}^{(3)} = \frac{2_q^6}{4 \cdot 3_q^2} \left(\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2\mathcal{S}_1 - a\,\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2\mathcal{S}_1 + b\,\mathcal{S}_1 \right) , \tag{2.48}$$

где коэффициенты a и b определены в (2.47). В силу (2.46) существует эквивалентная форма записи оператора $\mathcal{S}^{(3)}$:

$$\mathcal{S}^{(3)} = \frac{2_q^6}{4 \cdot 3_q^2} \left(\mathcal{S}_2\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2 - a\,\mathcal{S}_2\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2 + b\,\mathcal{S}_2 \right) . \tag{2.49}$$

Как оказывается, оператор $\mathcal{S}^{(3)}$ и есть искомый нами проектор на однородную компоненту третьего порядка $\mathcal{L}_3 \subset \mathfrak{L}_3$ алгебры уравнения отражений.

Утверждение 47 *Однородная компонента третьего порядка $\mathcal{L}_3$ алгебры уравнения отражений $\mathcal{L}(R_q)$ является образом проекционного оператора $\mathcal{S}^{(3)}$ при его действии на пространство $\mathfrak{L}_3$*

$$\mathcal{L}_3 = \operatorname{Im} \mathcal{S}^{(3)} .$$

Доказательство. То, что оператор $\mathcal{S}^{(3)}$ является проектором, то есть $(\mathcal{S}^{(3)})^2 = \mathcal{S}^{(3)}$, проверяется прямыми вычислениями.

Рассмотрим теперь проекцию соотношения (2.38) на однородную компоненту третьего порядка:

$$\mathcal{L}_3 = \mathfrak{L}_3/\langle \mathcal{I}_- \rangle_3, \qquad \langle \mathcal{I}_- \rangle_3 = \mathfrak{L}_1 \cdot \operatorname{Im} \mathcal{A}_2 \cup \operatorname{Im} \mathcal{A}_1 \cdot \mathfrak{L}_1 . \tag{2.50}$$

Из равенств (2.48) и (2.49) видно, что $\langle \mathcal{I}_- \rangle_3 \subseteq \operatorname{Ker} \mathcal{S}^{(3)}$ и, следовательно, $\operatorname{Im} \mathcal{S}^{(3)} \subseteq \mathcal{L}_3$.

С другой стороны, в силу условия полноты $\mathcal{S} + \mathcal{A} = \mathbf{I}$, выражение (2.50) для подпространства $\mathcal{L}_3$ можно записать в виде

$$\mathcal{L}_3 = \mathfrak{L}_1 \cdot \operatorname{Im} \mathcal{S}_2 \cap \operatorname{Im} \mathcal{S}_1 \cdot \mathfrak{L}_1 .$$

Сравнивая эту форму записи подпространства $\mathcal{L}_3$ со структурой оператора $\mathcal{S}^{(3)}$, приведенной в (2.48) и (2.49), мы заключаем, что $\operatorname{Im} \mathcal{S}^{(3)} \supseteq \mathcal{L}_3$. Это соотношение вместе с обратным включением, полученным ранее, влечет равенство $\mathcal{L}_3 = \operatorname{Im} \mathcal{S}^{(3)}$.
$\square$

2.4 Структура твистованной биалгебры и теория представлений

В данном разделе строятся конечномерные представления алгебры модифицированного уравнения отражений (2.33) в категории $\mathrm{SW}(V_{(m|n)})$. На протяжении всего раздела параметр $\hbar$ в перестановочных соотношениях (2.33) полагается равным единице.

Отметим, что класс всех конечномерных представлений рассматриваемой алгебры шире: например, он включает большое число одномерных представлений. В частном случае квантовогрупповой $U_q(sl(m))$ R-матрицы классификация всех одномерных представлений получена в [67]. Кроме того, в этом частном случае конечномерные представления можно строить на основе представлений $U_q(sl(m))$, так как алгебра уравнения отражений вкладывается (как алгебра) в квантовую группу.

Развиваемая ниже теория представлений не зависит от конкретного выбора R-матрицы и применима в общей ситуации, когда квантовая группа не существует. Одной из важных особенностей предлагаемой теории является ее эквивариантность.

Определение 48 Представление ρ_U алгебры модифицированного уравнения отражений в линейном пространстве U называется *эквивариантным*, если отображение

$$\mathrm{End}\,(V) \to \mathrm{End}\,(U): \quad l_i^j \mapsto \rho_U(l_i^j)$$

является морфизмом категории $\mathrm{SW}(V_{(m|n)})$.

Свойство эквивариантности представления имеет важное следствие, которое будет использовано в дальнейшем. А именно, если дан модуль W с эквивариантным представлением $\rho_W : \mathcal{L}(R_q, 1) \to \mathrm{End}\,(W)$, тогда диаграмма

$$\begin{array}{ccc} U \otimes (A \otimes W) & \stackrel{\mathsf{R}}{\longleftrightarrow} & (A \otimes W) \otimes U \\ \downarrow \mathrm{id} \otimes \rho_W & & \rho_W \otimes \mathrm{id} \downarrow \\ U \otimes W & \stackrel{\mathsf{R}}{\longleftrightarrow} & W \otimes U \end{array} \tag{2.51}$$

коммутативна для любого объекта U категории $\mathrm{SW}(V_{(m|n)})$ и любого подпространства $A \subset \mathcal{L}(R_q, 1)$. Свойство эквивариантности позволяет определять представление алгебры модифицированного уравнения отражений в тензорном произведении ее модулей.

Для частного случая четной симметрии Гекке би-ранга $(m|0)$ эквивариантная теория представлений ассоциированной с этой симметрией алгебры модифицированного уравнения отражений оказывается аналогичной теории представлений универсальной обертывающей алгебры $U(sl(m))$. В начале раздела 2.2 упоминалась одна особенность четного случая: в соответствующей категории Шура-Вейля $\mathrm{SW}(V_{(m|0)})$ дуальное пространство V^* отождествляется с объектом $V_{(1^{m-1})}$. Поэтому для построения замкнутой теории представлений достаточно, фактически, определить модульную структуру на исходном пространстве V и всех его тензорных степенях $V^{\otimes k}$. Любая тензорная степень $V^{\otimes k}$ есть вполне приводимый модуль над алгеброй модифицированного уравнения отражений и в силу этого свойства разлагается в прямую сумму (2.5) инвариантных подпространств V_λ; подробное изложение этих вопросов содержится в работах [39, 84].

Однако в общем случае симметрии Гекке би-ранга $(m|n)$ найденных в [39, 84] конструкций недостаточно. В этой ситуации представления алгебры модифицированного уравнения отражений в пространствах $V^{*\otimes k}$ необходимо строить независимо от представлений в $V^{\otimes k}$. Центральной проблемой всей теории становится определение структуры представления в тензорном произведении модулей вида $V_\lambda \otimes V^*_\mu$.

В настоящем разделе описана регулярная процедура построения представлений алгебры модифицированного уравнения отражений, которая не зависит от значения би-ранга симметрии Гекке. В четном случае (би-ранг $(m|0)$) воспроизводятся ранее полученные результаты работ [39, 84]. Указанная процедура базируется на структуре твистованной биалгебры, которая существует в алгебре модифицированного уравнения отражений.

Основной составляющей структуры твистованной биалгебры является коумножение Δ, осуществляющее гомоморфизм алгебры модифицированного уравнения отражений в некоторую ассоциативную твистованную алгебру $\mathbf{L}(R_q)$, к определению которой мы сейчас перейдем.

- Как векторное пространство над полем $\mathbb{K}$ алгебра $\mathbf{L}(R_q)$ изоморфна тензорному произведению двух копий алгебры модифицированного уравнения отражений
$$\mathbf{L}(R_q) = \mathcal{L}(R_q, 1) \otimes \mathcal{L}(R_q, 1)\,.$$

- Произведение в алгебре $\star : \mathbf{L}(R_q)^{\otimes 2} \to \mathbf{L}(R_q)$ определяется правилом:

$$(a_1 \otimes b_1) \star (a_2 \otimes b_2) := a_1 a_2' \otimes b_1' b_2 \,, \qquad a_i \otimes b_i \in \mathbf{L}(R_q) \,, \tag{2.52}$$

где $a_1 a_2'$ и $b_1 b_2'$ представляют собой обычные произведения элементов алгебры модифицированного уравнения отражений, а a_1' и b_1' есть результат действия твиста R_{End} (см. (2.31)) на вектор $b_1 \otimes a_2$

$$a_2' \otimes b_1' := R_{\mathrm{End}}(b_1 \otimes a_2) \,. \tag{2.53}$$

Следует убедиться в ассоциативности произведения (2.52). Для этой цели нам потребуется вспомогательная лемма.

Лемма 49 *Для матричных копий матрицы $L_{\overline{k}}$, определенных итерационной процедурой $L_{\overline{k}} = R_{k-1} L_{\overline{k-1}} R_{k-1}^{-1}$, выполняются следующие соотношения*

$$R_{\mathrm{End}}\,(L_{\overline{k}} \otimes L_{\overline{p}}) = L_{\overline{p}} \otimes L_{\overline{k}} \,, \qquad k < p, \quad \forall\, k, p \in \mathbb{N} \,. \tag{2.54}$$

Доказательство. Доказательство проводится прямыми вычислениями на основе соотношения (2.31), предварительно переписанного в виде

$$R_{\mathrm{End}}\,(L_1 R_{12} \otimes L_1) = R_{12} L_1 R_{12}^{-1} \otimes L_1 R_{12} \,,$$

а также уравнения Янга-Бакстера (A.22), которое позволяет переставлять цепочки R-матриц, входящий в определение матричных копий $L_{\overline{k}}$ и $L_{\overline{p}}$. □

Пользуясь леммой 49, легко проверить ассоциативность произведения (2.52) на объектах

$$X^i_{r,s} := L_{\bar{i}} \dots L_{\overline{i+r-1}} \otimes L_{\overline{i+r}} \dots L_{\overline{i+r+s-1}} \,,$$

матричные элементы которых представляют собой однородные полиномы по генераторам алгебры $\mathcal{L}(R_q, 1)$. Отметим, что в однородных компонентах алгебры модифицированного уравнения отражений мы пользуемся базисом, аналогичным базису (2.39).

Поскольку для любой тройки объектов $X^{i_1}_{r_1,s_1}$, $X^{i_2}_{r_2,s_2}$ и $X^{i_3}_{r_3,s_3}$ всегда можно выбирать i_1, i_2 и i_3 таким образом, что

$$i_3 \geq i_2 + r_2 + s_2 \geq i_1 + r_1 + s_1 \,,$$

то условие ассоциативности

$$(X^{i_1}_{r_1,s_1} \star X^{i_2}_{r_2,s_2}) \star X^{i_3}_{r_3,s_3} = X^{i_1}_{r_1,s_1} \star (X^{i_2}_{r_2,s_2} \star X^{i_3}_{r_3,s_3})$$

немедленно следует из Леммы 49. Так как любой элемент алгебры $\mathbf{L}(R_q)$ представляется в виде линейной комбинации матричных элементов некоторых объектов $X^{(i)}_{r,s}$, мы приходим к заключению, что правило (2.52) определяет ассоциативное произведение в алгебре $\mathbf{L}(R_q)$.

Отметим, что алгебра модифицированного уравнения отражений вкладывается в алгебру $\mathbf{L}(R_q)$. Для дальнейшего важны две подалгебры в $\mathbf{L}(R_q)$, изоморфные алгебре модифицированного уравнения отражений посредством следующих вложений:

$$a \mapsto e_{\mathcal{L}} \otimes a \quad \text{или} \quad a \mapsto a \otimes e_{\mathcal{L}}\,,$$

где $e_{\mathcal{L}}$ есть единичный элемент алгебры $\mathcal{L}(R_q, 1)$. Это сразу следует из того факта, что единица $e_{\mathcal{L}}$ тривиально коммутирует с любым элементом $a \in \mathcal{L}(R_q, 1)$ под действием твиста R_{End}. Поэтому

$$(e_{\mathcal{L}} \otimes a_1) \star (e_{\mathcal{L}} \otimes a_2) = (e_{\mathcal{L}} \otimes a_1 a_2) \quad \text{и} \quad (a_1 \otimes e_{\mathcal{L}}) \star (a_2 \otimes e_{\mathcal{L}}) = (a_1 a_2 \otimes e_{\mathcal{L}})\,.$$

Определим линейное отображение $\Delta : \mathcal{L}(R_q, 1) \to \mathbf{L}(R_q)$ следующим правилом:

$$\begin{aligned} &\Delta(e_{\mathcal{L}}) := e_{\mathcal{L}} \otimes e_{\mathcal{L}} \\ &\Delta(l_i^j) := l_i^j \otimes e_{\mathcal{L}} + e_{\mathcal{L}} \otimes l_i^j - (q - q^{-1}) \textstyle\sum_k l_i^k \otimes l_k^j \\ &\Delta(ab) := \Delta(a) \star \Delta(b) \qquad \forall\, a, b \in \mathcal{L}(R_q, 1)\,. \end{aligned} \tag{2.55}$$

Введем также линейное отображение $\varepsilon : \mathcal{L}(R_q, 1) \to \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} &\varepsilon(e_{\mathcal{L}}) := 1 \\ &\varepsilon(l_i^j) := 0 \\ &\varepsilon(ab) := \varepsilon(a)\varepsilon(b) \qquad \forall\, a, b \in \mathcal{L}(R_q, 1)\,. \end{aligned} \tag{2.56}$$

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 50 *Отображения Δ и ε, заданные в* (2.55) *и* (2.56), *являются соответственно коумножением и коединицей твистованной биалгебраической структуры в алгебре модифицированного уравнения отражений $\mathcal{L}(R_q, 1)$.*

Доказательство. Прежде всего проверим, что отображение Δ задает гомоморфизм алгебр $\mathcal{L}(R_q, 1) \to \mathbf{L}(R_q)$. Вычисления выглядят проще в базисе сдвинутых генераторов $M = \|m_i^j\|$:

$$M = I e_{\mathcal{L}} - \frac{(q - q^{-1})}{\hbar}\, L,$$

определенных в Замечании 39.

В терминах этих генераторов отображение Δ принимает вид

$$\Delta(m_i^j) = \sum_s m_i^s \otimes m_s^j \,, \tag{2.57}$$

или, переходя к матричной форме записи,

$$\Delta(M) = M \dot{\otimes} M.$$

Здесь точка над символом тензорного произведения означает дополнительное матричное произведение умножаемых матриц. То есть, если матрица M имеет размеры $N \times N$, а ее матричные элементы принадлежат какому-то пространству $\mathcal{A}$, то матрица $M \dot{\otimes} M$ имеет те же размеры $N \times N$ (а не $N^2 \times N^2$, как было бы в случае обычного тензорного произведения), но ее матричные элементы принадлежат пространству $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$, как указано в (2.57).

Для матричной копии $M_{\overline{k}}$ получается аналогичное соотношение:

$$\Delta(M_{\overline{k}}) = M_{\overline{k}} \dot{\otimes} M_{\overline{k}} \qquad \forall\, k \geq 1\,.$$

Принимая во внимание определения (2.52) и (2.31), находим

$$\Delta(M_{\overline{1}} M_{\overline{2}}) = \Delta(M_{\overline{1}}) \star \Delta(M_{\overline{2}}) = M_{\overline{1}} M_{\overline{2}} \dot{\otimes} M_{\overline{1}} M_{\overline{2}}\,.$$

Сравнивая это с (2.34), получаем окончательно

$$R_{12} \Delta(M_{\overline{1}} M_{\overline{2}}) = \Delta(M_{\overline{1}} M_{\overline{2}}) R_{12}\,,$$

то есть, отображение Δ является гомоморфизмом алгебр. Отметим, что твистованное коумножение (2.57) было предложено в [64].

Требуемая взаимосвязь ε и Δ

$$(\mathrm{id} \otimes \varepsilon)\, \Delta = \mathrm{id} = (\varepsilon \otimes \mathrm{id})\, \Delta$$

проверяется элементарно. $\square$

Рассмотрим теперь вопрос о том, какие представления алгебры $\mathbf{L}(R_q)$ можно построить, основываясь на представлениях алгебры модифицированного уравнения отражений. Выбрав два эквивариантных модуля над алгеброй модифицированного уравнения отражений U и W с представлениями $\rho_U : \mathcal{L}(R_q, 1) \to \mathrm{End}\,(U)$

и $\rho_W : \mathcal{L}(R_q, 1) \to \mathrm{End}\,(W)$, построим отображение $\rho_{U\otimes W} : \mathbf{L}(R_q) \to \mathrm{End}\,(U \otimes W)$ по следующему правилу:

$$\rho_{U\otimes W}(a\otimes b) \triangleright (u\otimes w) = (\rho_U(a) \triangleright u') \otimes (\rho_W(b') \triangleright w)\,, \qquad a\otimes b \in \mathbf{L}(R_q)\,, \qquad (2.58)$$

где символ $\triangleright$ обозначает действие оператора, а элемент(ы) b' и вектор(а) u' получаются действием соответствующего твиста (зависящего от b и u) категории $\mathrm{SW}(V_{(m|n)})$

$$u'\otimes b' := \mathsf{R}(b\otimes u)\,.$$

В силу Утверждения 40 определение (2.58) самосогласовано, так как отображение $b \mapsto \rho_W(b')$ также является представлением алгебры $\mathcal{L}(R_q, 1)$.

Теорема 51 *Действие* (2.58) *определяет представление алгебры* $\mathbf{L}(R_q)$.

Доказательство. Рассмотрим два произвольных элемента алгебры $\mathbf{L}(R_q)$

$$X_i = (a_i \otimes b_i) \in \mathbf{L}(R_q), \quad i = 1, 2\,.$$

Нам нужно показать, что для любого вектора $u\otimes w \in U\otimes W$ выполнено соотношение

$$\rho_{U\otimes W}(X_1 \star X_2) \triangleright (u\otimes w) = \rho_{U\otimes W}(X_1) \triangleright \Big(\rho_{U\otimes W}(X_2) \triangleright (u\otimes w)\Big)\,. \qquad (2.59)$$

В левой и правой части формулы (2.59) стоят, фактически, два отображения, сопоставляющих элементу

$$(a_1\otimes b_1)\otimes(a_2\otimes b_2)\otimes(u\otimes w)$$

некоторый вектор пространства $U\otimes W$. Мы докажем, что применение этих (априори разных) отображений к указанному элементу действительно приводит к одинаковому результату.

Введем сокращенные обозначения

$$\mathsf{R}(b_1\otimes a_2) = a_2'\otimes b_1'\,, \quad \mathsf{R}(b_2\otimes u) = u'\otimes b_2'\,, \quad \mathsf{R}(b_1'\otimes u') = u''\otimes b_1''\,.$$

Определения (2.52) и (2.58) дают возможность представить левую часть формулы (2.59) в виде композиции следующих морфизмов категории $\mathrm{SW}(V_{m|n})$

$$\begin{aligned}(a_1\otimes b_1)\otimes(a_2\otimes b_2)\otimes(u\otimes w) &\mapsto (a_1\otimes a_2')\otimes(b_1'\otimes b_2)\otimes(u\otimes w)\\ &\mapsto (a_1a_2'\otimes b_1'b_2)\otimes(u\otimes w) \mapsto (a_1a_2'\otimes u'')\otimes(b_1''b_2'\otimes w)\\ &\mapsto (\rho_U(a_1a_2')\triangleright u'')\otimes(\rho_W(b_1''b_2')\triangleright w)\,.\end{aligned}$$

Учтем теперь условие эквивариантности (2.51) представлений ρ_U и ρ_W. Это условие означает, что под действием категорных твистов вектор $\rho_U(a)\triangleright u$ переставляется с *любым* объектом таким же образом, как и элемент $a\otimes u$. Следовательно, правая часть формулы (2.59) может быть, в свою очередь, представлена в виде такой композиции морфизмов

$$\begin{aligned}(a_1\otimes b_1)\otimes(a_2\otimes b_2)\otimes(u\otimes w) &\mapsto (a_1\otimes b_1)\otimes(a_2\otimes u')\otimes(b_2'\otimes w)\\ &\mapsto (a_1\otimes b_1)\otimes(\rho_U(a_2)\triangleright u'\otimes\rho_W(b_2')\triangleright w)\\ &\mapsto (a_1\otimes\rho_U(a_2')\triangleright u'')\otimes(b_1''\otimes\rho_W(b_2')\triangleright w)\\ &\mapsto (\rho_U(a_1)\triangleright\rho_U(a_2')\triangleright u'')\otimes(\rho_W(b_1'')\triangleright\rho_W(b_2')\triangleright w)\\ &\mapsto (\rho_U(a_1a_2')\triangleright u'')\otimes(\rho_W(b_1''b_2')\triangleright w)\,.\end{aligned}$$

Таким образом, отображения в левой и правой части формулы (2.59) одному исходному элементу сопоставляют одинаковый вектор в пространстве $U\otimes W$. Это означает идентичность этих отображений и завершает все доказательство. $\square$

Теорема 52 *Пусть U и W являются двумя модулями над алгеброй $\mathcal{L}(R_q,1)$ с эквивариантными представлениями ρ_U и ρ_W. Тогда эквивариантное представление $\mathcal{L}(R_q,1)\to \mathrm{End}\,(U\otimes W)$ задается правилом:*

$$a\mapsto \rho_{U\otimes W}(\Delta(a))\,,\qquad \forall\, a\in\mathcal{L}(R_q,1)\,, \tag{2.60}$$

где коумножение Δ и отображение $\rho_{U\otimes W}$ определены формулами (2.55) и (2.58) соответственно.

Доказательство. Справедливость этой теоремы непосредственно вытекает из Утверждения 50 и Теоремы 51. $\square$

Как было отмечено в начале этого раздела, эквивариантные представления алгебры модифицированного уравнения отражений $\mathcal{L}(R_q,1)$ в пространствах V_λ, $\lambda\vdash k\in\mathbb{N}$, были построены в [39, 84]. Тем же методом строятся представления в пространствах V_λ^*. После этого формула (2.60) позволяет распространить модульную структуру над алгеброй модифицированного уравнения отражений на все объекты категории $\mathrm{SW}(V_{(m|n)})$.

Для большей замкнутости изложения приведем краткое описание результатов работ [39, 84] и докажем эквивариантность представления в пространстве V^*. В отличие от четного случая, для симметрии Гекке общего би-ранга эквивариантность представлений в дуальных пространствах V^*_λ должна доказываться независимо от представлений в пространствах V_λ.

Базисное представление алгебры $\mathcal{L}(R_q,1)$ в пространстве V задается в терминах матричных элементов оператора B

$$\rho_1(l_i^j) \triangleright x_k = B^j_{\ k} x_i. \tag{2.61}$$

В работе [84] было показано, что отображение $\rho_2 : \mathcal{L}(R_q,1) \to \mathrm{End}\,(V^{\otimes 2})$ вида

$$\rho_2(l_i^j) \triangleright (x_{k_1} \otimes x_{k_2}) = (\rho_1(l_i^j) \triangleright x_{k_1}) \otimes x_{k_2} + \Big(R^{-1} \circ (\rho_1(l_i^j) \otimes I) \circ R^{-1}\Big) \triangleright (x_{k_1} \otimes x_{k_2})$$

дает представление алгебры $\mathcal{L}(R_q,1)$. Расширения базисного представления до старших представлений $\rho_p : \mathcal{L}(R_q,1) \to \mathrm{End}\,(V^{\otimes p})$, $p \geq 3$, определяется аналогичными формулами (см. [84]). Несложно показать, что эти расширения совпадают с универсальным рецептом (2.60).

Выписанные выше представления являются вполне приводимыми: пространство $V^{\otimes p}$ разлагается в прямую сумму инвариантных подпространств V_λ, нумеруемых разбиениями $\lambda \vdash p$. Ограничение представления ρ_p на подпространство V_λ достигается действием ортонормированных проекторов E^λ_a (см. формулы (2.4) и (2.5))

$$\rho_{\lambda,a} = E^\lambda_a \circ \rho_p \circ E^\lambda_a\,, \tag{2.62}$$

причем модули, отвечающие различным значениям индекса a, эквивалентны.

Базисное представление $\rho_1^* : \mathcal{L}(R_q,1) \to \mathrm{End}\,(V^*)$ дается правилом:

$$\rho_1^*(l_i^j) \triangleright x^k = -x^r R^{kj}_{ri}\,. \tag{2.63}$$

Для доказательства его эквивариантности установим справедливость следующей леммы.

Лемма 53 *Пусть R является кособратимой симметрией Гекке. Тогда отображение*

$$V \otimes V^* \to V^* \otimes V \;:\quad x_i \otimes x^j \mapsto x^k \otimes x_l R^{lj}_{ki} \tag{2.64}$$

есть морфизм соответствующей категории Шура-Вейля.

Доказательство. Для любой симметрии Гекке $R = R^{-1} + (q-q^{-1})I$ в силу (A.23). Подставляя это равенство в (2.64)

$$x_i \otimes x^j \mapsto x^k \otimes x_l\,(R^{-1})^{lj}_{ki} + (q-q^{-1})\,\delta^j_i\,x^k \otimes x_k\,,$$

мы обнаружим, что исследуемое отображение (2.64) есть линейная комбинация категорного морфизма из списка (2.14) и отображения вида

$$x_i \otimes x^j \mapsto \delta_i^j \, x^k \otimes x_k \, .$$

Это отображение, в свою очередь, представляется в виде композиции морфизмов категории Шура-Вейля

$$x_i \otimes x^j \overset{\langle , \rangle_r}{\mapsto} \delta_i^j \, 1 \overset{\pi_r}{\mapsto} \delta_i^j \, x^k \otimes x_k \, ,$$

где мы последовательно применили категорные морфизмы (2.12) и (2.16).

Итак, отображение (2.64) представлено в виде линейной комбинации морфизмов категории Шура-Вейля, следовательно оно также является категорным морфизмом согласно определению класса морфизмов. □

Утверждение 54 *Представление* (2.63) *алгебры* $\mathcal{L}(R_q, 1)$ *в пространстве* V^* *является эквивариантным.*

Доказательство. Для проверки эквивариантности представления ρ_1^* мы должны убедиться, что отображение $\rho_1^* : \mathcal{L}(R_q, 1) \to \mathrm{End}\,(V^*)$ есть морфизм категории Шура-Вейля.

Отождествляя генератор l_i^j с элементом $x_i \otimes x^j$, мы можем трактовать любое эквивариантное левое действие генератора l_i^j на базисный вектор $x^k \in V^*$ как отображение

$$V \otimes V^* \otimes V^* \to V^*.$$

Построим пример такого действия в виде следующей композиции морфизмов

$$V \otimes V^* \otimes V^* \overset{(2.64)\otimes I}{\longrightarrow} V^* \otimes V \otimes V^* \overset{I \otimes \langle , \rangle_r}{\longrightarrow} V^* \otimes \mathbb{K} \cong V^* \, ,$$

или, в терминах базисных векторов,

$$l_i^j \triangleright x^k = x^r R_{ri}^{\,kj} \, .$$

Легко видеть, что базисное представление (2.63) отличается от построенного морфизма только знаком. □

Рассмотрим подробно важный пример "присоединенного" представления алгебры модифицированного уравнения отражений, действующего в линейной оболочке генераторов l_i^j этой алгебры. Поскольку

$$\mathrm{Span}(l_i^j) \cong V \otimes V^* \, ,$$

то рассматриваемое представление строится по общей формуле (2.60), которая в данном случае принимает вид

$$l_i^j \mapsto \rho_{V\otimes V^*}(\Delta(l_i^j))\,,$$

где в качестве $\rho_V(l_i^j)$ и $\rho_{V^*}(l_i^j)$ следует взять базисные представления (2.61) и (2.63) соответственно. Опуская промежуточные выкладки, представим окончательный ответ в компактной матричной форме

$$\rho_{V\otimes V^*}(L_{\overline{1}}) \triangleright L_{\overline{2}} = L_1R_{12} - R_{12}L_1. \tag{2.65}$$

Коумножение Δ (2.55) позволяет расширить это представление с линейной оболочки генераторов алгебры модифицированного уравнения отражений на любую ее однородную компоненту.

Заметим, что результат действия (2.65) совпадает с L-линейной частью определяющих перестановочных соотношений (2.33) алгебры $\mathcal{L}(R_q,1)$, если их переписать в эквивалентной форме

$$L_{\overline{1}}L_{\overline{2}} - R_{12}^{-1}L_{\overline{1}}L_{\overline{2}}R_{12} = L_1R_{12} - R_{12}L_1\,.$$

В этом смысле действие (2.65) аналогично присоединенному действию алгебры Ли $\mathfrak{g}$ на ее универсальной обертывающей алгебре $U(\mathfrak{g})$, которое тоже задается линейной по генераторам частью скобки Ли и распространяется с алгебры Ли на старшие однородные компоненты алгебры $U(\mathfrak{g})$ с помощью хорошо известного стандартного коумножения.

В завершение раздела рассмотрим вопрос об “sl-редукции”, то есть, о переходе от алгебры $\mathcal{L}(R_q,1)$ к ее фактор-алгебре $\mathcal{SL}(R_q)$

$$\mathcal{SL}(R_q) := \mathcal{L}(R_q,1)/\langle \ell\rangle\,, \qquad \ell := \mathrm{Tr}_R L := \mathrm{Tr}(CL)\,. \tag{2.66}$$

Элемент ℓ централен в алгебре модифицированного уравнения отражений, что может быть легко проверено вычислением R-следа во втором пространстве матричного соотношения (2.33). Вычисление проводится на основе формул (A.33).

Для явного описания фактор-алгебры $\mathcal{SL}(R_q)$ перейдем к новому набору генераторов $\{f_i^j,\ell\}$, связанному с прежним набором следующим линейным преобразованием:

$$l_i^j = f_i^j + (\mathrm{Tr}\,C)^{-1}\delta_i^j\,\ell \quad \text{или} \quad L = F + (\mathrm{Tr}\,C)^{-1}I\,\ell\,, \tag{2.67}$$

где $F = \|f_i^j\|$. Очевидно, что $\mathrm{Tr}_R F = 0$. Обратим внимание, что в силу (2.10) приведенный выше сдвиг возможен только если $m \neq n$.

В терминах новых генераторов перестановочные соотношения алгебры $\mathcal{L}(R_q, 1)$ записываются в виде

$$\begin{cases} R_{12}F_1R_{12}F_1 - F_1R_{12}F_1R_{12} = (e_{\mathcal{L}} - \dfrac{\omega}{Tr(C)}\,\ell)(R_{12}F_1 - F_1R_{12}) \\ \ell\, F = F\,\ell\,, \qquad \mathrm{Tr}_R F = 0\,, \end{cases}$$

где $\omega := q - q^{-1}$. Теперь легко получить явное описание фактора (2.66) в терминах генераторов и соотношений на них. Матрица $F = \|f_i^j\|$, составленная из генераторов алгебры $\mathcal{SL}(R_q)$, удовлетворяет тем же перестановочным соотношениям (2.33), что и матрица L:

$$R_{12}F_1R_{12}F_1 - F_1R_{12}F_1R_{12} = R_{12}F_1 - F_1R_{12}\,, \qquad \mathrm{Tr}_R F = 0\,, \tag{2.68}$$

но ее матричные элементы f_i^j линейно зависимы в силу соотношения $\mathrm{Tr}_R F = \mathrm{Tr}(CF) = 0$.

Нетрудно также переписать представление (2.65) в терминах генераторов f_i^j и ℓ. Учитывая связь (2.67), находим после небольших преобразований:

$$\begin{aligned} &\rho_{V\otimes V^*}(\ell) \triangleright \ell = 0, \qquad \rho_{V\otimes V^*}(F_1) \triangleright \ell = 0\,, \\ &\rho_{V\otimes V^*}(\ell) \triangleright F_1 = -\omega\, Tr(C)\, F_1 \\ &\rho_{V\otimes V^*}(F_{\overline{1}}) \triangleright F_{\overline{2}} = F_1R_{12} - R_{12}F_1 + \omega R_{12}F_1R_{12}^{-1}\,. \end{aligned} \tag{2.69}$$

Отметим, что соотношение (2.69) определяет "присоединенное" представление фактор-алгебры $\mathcal{SL}(R_q)$, но, в отличие от представления самой алгебры модифицированного уравнения отражений $\mathcal{L}(R_q, 1)$, представление ее фактора $\mathcal{SL}(R_q)$ не дается линейной частью квадратично-линейных перестановочных соотношений (2.68).

В общем случае, если в представлении $\rho : \mathcal{L}(R_q, 1) \to \mathrm{End}\,(U)$ элемент ℓ кратен единичному оператору (например, в неприводимом представлении)

$$\rho(\ell) = \chi\, I_U\,, \qquad \chi \in \mathbb{K}\,,$$

то можно построить соответствующее представление $\tilde{\rho} : \mathcal{SL}(R_q) \to \mathrm{End}\,(U)$ по правилу [84]

$$\tilde{\rho}(f_i^j) = \frac{1}{\xi}\left(\rho(l_i^j) - (\mathrm{Tr}\, C)^{-1}\rho(\ell)\,\delta_i^j\right)\,, \qquad \xi = 1 - (q - q^{-1})(\mathrm{Tr}\, C)^{-1}\chi\,. \tag{2.70}$$

Алгебра уравнения отражений (2.34) допускает серию автоморфизмов $M \mapsto zM$ с ненулевым множителем $z \in \mathbb{K}$. На уровне представлений алгебры модифицированного уравнения отражений эти автоморфизмы принимают вид (напомним, что $\hbar = 1$)

$$\rho_U(l_i^j) \mapsto \rho_U^z(l_i^j) = z\rho_U(l_i^j) + \frac{(1-z)}{(q-q^{-1})}\,\delta_i^j\, I_U\,.$$

Пользуясь (2.70), можно показать, что представление $\tilde{\rho}_U$ алгебры $\mathcal{SL}(R_q)$, построенное на основе ρ_U^z, не зависит от z. Другими словами, весь класс представлений ρ_U^z, связанных приведенными выше автоморфизмами, переходит в одно представление фактор-алгебры $\mathcal{SL}(R_q)$.

2.5 Матричная структура и характеры центральных элементов

В данном разделе приводится явная матричная структура представлений модифицированной алгебры уравнения отражений $GL(m)$ типа, которая получается из формул (2.60) и (2.61). Кроме того, вычисляются характеры центральных элементов алгебры в сериях конечномерных представлений, задаваемых полными q-антисимметризаторами и полными q-симметризаторами. В последнем подразделе рассмотрено представление sl-редуцированной алгебры $\mathcal{SL}(R_q)$.

2.5.1 Тензорные степени базисного представления

Мы начинаем с базисного конечномерного пространства V, $\dim V = N$, в котором задано представление модифицированной алгебры уравнения отражений $\mathcal{L}(R_q, 1)$ вида (2.61):

$$\rho_1(l_i^j) \triangleright x_k = x_i B_k^j, \qquad 1 \le i, j, k \le N,$$

где вектора $\{x_k\}_{1\le k\le N}$ образуют некоторый фиксированный базис пространства V, а $N \times N$ матрица $B = \|B_i^j\|$ строится по $N^2 \times N^2$ R-матрице $GL(m)$ типа (см. Приложение A). Рассмотрим расширение этого представления на тензорную степень $V^{\otimes n}$, которое получается $(n-1)$-кратным применением формулы (2.60).

Прежде всего введем удобные компактные обозначения для следующих цепочек R-матриц:

$$R_i \equiv R_{ii+1}, \qquad R^{\pm 1}_{(i\to j)} \stackrel{\rm def}{=} \begin{cases} R_i^{\pm 1} R_{i+1}^{\pm 1} \dots R_j^{\pm 1} & \text{if } \ i<j \\ R_i^{\pm 1} R_{i-1}^{\pm 1} \dots R_j^{\pm 1} & \text{if } \ i>j \\ R_i^{\pm 1} & \text{if } \ i=j. \end{cases} \tag{2.71}$$

Опишем теперь явную матричную структуру представления алгебры $\mathcal{L}(R_q,1)$ в тензорной степени $V^{\otimes k}$ пространства V.

Утверждение 55 *Зафиксируем в пространстве V набор базисных векторов $\{x_i\}$, $1 \le i \le N$, и зададим представление модифицированной алгебры уравнения отражений $\mathcal{L}(R_q,1)$ в пространстве V формулой (2.61). Тогда k-я тензорная степень пространства V также является (приводимым) модулем над $\mathcal{L}(R_q,1)$. В базисе $\{x_{i_1}\otimes\dots\otimes x_{i_k}\}$ операторы, представляющие генераторы l_i^j алгебры $\mathcal{L}(R_q,1)$, задаются следующими матрицами:*

$$\rho_k(l_i^j) = \rho_1(l_i^j)\otimes I^{\otimes(k-1)} + \sum_{s=1}^{k-1} R^{-1}_{(s\to 1)}\Big[\rho_1(l_i^j)\otimes I^{\otimes(k-1)}\Big] R^{-1}_{(1\to s)}. \tag{2.72}$$

Доказательство данного утверждения изложено в работе [84], где проведена прямая проверка, что операторы (2.72) действительно удовлетворяют перестановочным соотношениям модифицированной алгебры уравнения отражений. Другой способ состоит в непосредственном применении формулы (2.60) и явного вида перестановочных морфизмов категории Шура-Вейля.

Построенное представление в пространстве $V^{\otimes k}$ является приводимым. Нашей следующей целью является поиск разложения $V^{\otimes k}$ в прямую сумму инвариантных подпространств. Такое разложение может быть построено с использованием изоморфизма алгебры Гекке $H_k(q)$ и групповой алгебры $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_k]$ симметрической группы перестановок k-го порядка: $H_k(q)\cong\mathbb{C}[\mathfrak{S}_k]$. Этот изоморфизм имеет место для значений параметра q в общем положении (см. Приложение А). Для нашего построения наиболее важным следствием указанного изоморфизма является существование q-аналогов примитивных идемпотентов Юнга $E_a^\lambda \in H_k(q)$ и разложение пространства $V^{\otimes k}$ в прямую сумму $H_k(q)$ модулей

$$V^{\otimes k} = \bigoplus_{\lambda\vdash k}\bigoplus_{a=1}^{\dim[\lambda]} V_a^\lambda, \qquad V_a^\lambda = \mathrm{Im}(\rho_R(E_a^\lambda)). \tag{2.73}$$

Здесь $\rho_R(E_a^\lambda) \in \mathrm{End}(V^{\otimes k})$ — образ идемпотента E_a^λ относительно локального R-матричного представления алгебры Гекке (A.24). Символ $\dim[\lambda]$ обозначает количество стандартных таблиц Юнга, которые можно построить по заданной диаграмме (разбиению) $\lambda \vdash k$. По сути, это число равно множественности модуля V^λ в разложении тензорной степени V^k, поскольку все модули V_a^λ с фиксированным λ изоморфны друг другу.

Утверждение 56 *Рассмотрим модифицированную алгебру уравнения отражений (2.33) с R-матрицей $GL(p)$ типа (то есть, имеющей ранг симметрии p). Пусть в пространстве V задано неприводимое представление (2.61). Тогда представление в тензорной степени $V^{\otimes k}$, заданное формулой (2.72), приводимо и может быть разложено в прямую сумму инвариантных подпространств V_a^λ, параметризуемых разбиениями $\lambda \vdash k$. Кратность модуля, отвечающего разбиению λ, в прямой сумме равна числу стандартных таблиц Юнга, которые можно построить для разбиения λ. Матрицы операторов, представляющих генераторы модифицированной алгебры уравнения отражений в алгебре $\mathrm{End}(V^\lambda)$, в базисе $x_{i_1} \otimes \cdots \otimes x_{i_k}$ пространства $V^{\otimes k}$ даются следующим правилом:*

$$\rho_{\nu(a)}(l_i^{\,j}) = Y_{\nu(a)}(R)\, \rho_k(l_i^{\,j})\, Y_{\nu(a)}(R), \tag{2.74}$$

где отображение ρ_k определено формулой (2.72) Утверждения 55.

Модули, параметризованные различными таблицами Юнга одного и того же разбиения λ эквивалентны.

Доказательство. Доказательство немедленно следует из соответствующих свойств проекторов Юнга, представляющих примитивные идемпотенты алгебры Гекке (см. Приложение A). Подробности изложены в работе [84]. □

Для представлений, параметризованных однострочными и одностолбцовыми диаграммами формулы становятся гораздо проще, и, кроме того, для этих представлений можно явно вычислить спектр центральных элементов $s_m(L) = \mathrm{Tr}_R(L^m)$.

Утверждение 57 *Рассмотрим модули V_a^ν над модифицированной алгеброй уравнения отражений $GL(p)$ типа, введенные в Предложении 56.*

i) *Для разбиений $\nu = (k)$ и $\nu = (1^k)$ (где $k \le p$) матрицы операторов из $\mathrm{End}\,(V^{(k)})$ и $\mathrm{End}\,(V^{(1^k)})$, представляющих генераторы алгебры уравнения от-*

ражений, задаются следующими выражениями:

$$\rho_{(k)}(l_i^j) = q^{1-k} k_q\, S^{(k)}(R) \left[\rho_1(l_i^j) \otimes I^{\otimes(k-1)}\right] S^{(k)}(R), \qquad (2.75)$$

$$\rho_{[k]}(l_i^j) = q^{k-1} k_q\, A^{(k)}(R) \left[\rho_1(l_i^j) \otimes I^{\otimes(k-1)}\right] A^{(k)}(R), \quad k \le p, \qquad (2.76)$$

где $S^{(k)}$ и $A^{(k)}$ являются, R-матричным представлением q-симметризатора и q-антисимметризатора алгебры Гекке.

ii) *В представлениях $\rho_{(k)}$ и $\rho_{[k]}$ спектр χ центральных элементов $s_m = \mathrm{Tr}_R(L^m)$ принимает значения*

$$\chi_{(k)}(s_m) = q^{-m(p+k-1)-p}\, k_q (p+k-1)_q^{m-1}, \qquad (2.77)$$

$$\chi_{[k]}(s_m) = q^{-m(p-k+1)-p}\, k_q (p-k+1)_q^{m-1}. \qquad (2.78)$$

Доказательство. Утверждение **i)** является прямым следствием соотношения (2.74). Действительно, заменяя в (2.74) проектор $Y_{\nu(a)}$ для произвольного разбиения на проекторы $S^{(k)}(R)$ или $A^{(k)}(R)$ соответственно и принимая во внимание равенства

$$\begin{matrix} R_i^{\pm 1} S^{(k)}_{12\dots k} = q^{\pm 1} S^{(k)}_{12\dots k} = S^{(k)}_{12\dots k} R_i^{\pm 1} \\ R_i^{\pm 1} A^{(k)}_{12\dots k} = -q^{\mp 1} A^{(k)}_{12\dots k} = A^{(k)}_{12\dots k} R_i^{\pm 1} \end{matrix} \qquad 1 \le i \le k-1$$

и определение (A.5) q-числа, мы сразу приходим к (2.75) и (2.76).

Чтобы определить значение характеров (2.77) и (2.78), нужно рассмотреть матрицу $\rho_{(k)}(\mathrm{Tr}_R(L^m))$ (берем, для определенности, q-симметрический случай) и показать, что она пропорциональна q-симметризатору (который является единичным оператором на подпространстве $V_{(k)}$). Коэффициент пропорциональности и будет равен значению характера $\chi_{(k)}(s_m)$.

Принимая во внимание $B \cdot C = q^{-2p} I$, рассматриваемую матрицу можно переписать в виде

$$\rho_{(k)}(\mathrm{Tr}_R L^m) = q^{m(1-k)-2p}\, k_q^m\, S^{(k)}_{12\dots k} \left[\mathrm{Tr}_{(1)} B_1 S^{(k)}_{12\dots k}\right]^{m-1} S^{(k)}_{12\dots k}.$$

Для вычисления следа $\mathrm{Tr}_{(1)} B_1 S^{(k)}_{12\dots k}$ нужно воспользоваться рекуррентными соотношениями для q-(анти)симметризаторов (см., например, работу [23])

$$S^{(1)}(R) = I \qquad S^{(k)}_{12\dots k}(R) = \frac{1}{k_q}\, S^{(k-1)}_{2\dots k}(R)\Big(q^{1-k} I + (k-1)_q R_{12}\Big) S^{(k-1)}_{2\dots k}(R), \qquad (2.79)$$

$$A^{(1)}(R) = I \qquad A^{(k)}_{12\dots k}(R) = \frac{1}{k_q}\, A^{(k-1)}_{2\dots k}(R)\Big(q^{k-1} I - (k-1)_q R_{12}\Big) A^{(k-1)}_{2\dots k}(R) \qquad (2.80)$$

где $S^{(k-1)}_{2\dots k}$ есть q-симметризатор степени $(k-1)$, действующий в компонентах векторного произведения $V^{\otimes k}$ с номерами от 2 до k. В результате находим

$$\mathrm{Tr}_{(1)} B_1 S^{(k)}_{12\dots k} = q^{-p}\, \frac{(p+k-1)_q}{k_q}\, S^{(k-1)}_{2\dots k}.$$

После вычисления этого следа приходим к окончательному ответу

$$\rho_{(k)}(\mathrm{Tr}_R L^m) = q^{-m(p+k-1)-p}\, k_q (p+k-1)_q^{m-1}\, S^{(k)}(R) = \chi_{(k)}(s_m)\,\mathrm{id}_{V_{(k)}}, \tag{2.81}$$

что и утверждалось в (2.77). □

Стоит отметить, что в приведенных выше формулах центральную роль играет ранг симметрии p соответствующей R-матрицы, а не параметр N, определяющий размер R-матрицы и число генераторов соотвествующей алгебры уравнения отражений.

2.5.2 sl-редукция

Рассмотрим теперь проблему построения тензорных произведений фундаментальных представлений (2.70) алгебры $\mathcal{SL}(R_q)$. Фактически, решение этой проблемы следует из Утверждения 56 и формулы (2.70). Необходимо только вычислить спектр центрального элемента $\mathrm{Tr}_R L$ в представлениях (2.74).

Лемма 58 *Пусть разбиение $\nu \vdash k$ имеет высоту s, то есть*

$$\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_s), \quad \sum_{r=1}^{s} \nu_i = k, \quad \nu_1 \ge \nu_2 \ge \dots \ge \nu_s > 0.$$

Тогда спектр центрального элемента $s_1 = \mathrm{Tr}_R L$ в представлении $\rho_{\nu(a)}$ $1 \le a \le \dim[\nu]$ имеет следующий вид:

$$\chi_\nu(s_1) = q^{-2p} \sum_{r=1}^{s} q^{2r-1-\nu_r} (\nu_r)_q, \tag{2.82}$$

где натуральное число $p \ge 2$ есть ранг симметрии R-матрицы, а $(\nu_r)_q$ представляет собой q-аналог целого числа ν_r (см. определение (A.5)).

Доказательство. Найдем матрицу $\rho_{\nu(a)}(\mathrm{Tr}_R L)$ для произвольной таблицы $\nu(a)$. Пользуясь соотношениями (A.28) и (A.30), получаем из (2.74) следующий результат:

$$\rho^t_{\nu(a)}(\mathrm{Tr}_R L) = q^{-2p}\, Y_{\nu(a)}(R) \Big(J_1^{-1} + J_2^{-1} + \dots + J_k^{-1} \Big) Y_{\nu(a)}(R).$$

Величины J_k представляют собой матрицы следующео вида

$$J_1 = I, \quad J_i = R_{(i-1\to 1)}R_{(1\to i-1)} \quad i \geq 2. \tag{2.83}$$

Эти матрицы явяются образами элементов *Юциса-Мерфи* $\mathcal{J}_i(\sigma)$ алгебры Гекке $H_k(q)$ относительно локального представления (A.24). Элементы $\mathcal{J}_i(\sigma)$ генерируют максимальную коммутативную подалгебры в $H_k(q)$ и обладают следующими важными свойствами [73]

$$\mathcal{J}_i(\sigma)\mathcal{Y}_{\nu(a)}(\sigma) = \mathcal{Y}_{\nu(a)}(\sigma)\mathcal{J}_i(\sigma) = q^{2(c_i-r_i)}\mathcal{Y}_{\nu(a)}(\sigma),$$

где числа c_i и r_i представляют собой координаты соответственно столбца и строки, в которых расположена клетка с номером i. Величина $q^{2(c-r)}$ называется *содержимым* (c,r)-й клетки данной диаграммы Юнга. Ниже приведен пример диаграммы $\nu = (4,3,1^2)$ с явным указанием содержимого всех клеток:

1	q^2	q^4	q^6
q^{-2}	1	q^2	
q^{-4}			
q^{-6}			

Резюмируя сказанное, мы приходим к следующему результату:

$$\rho^t_{\nu(a)}(\mathrm{Tr}_R L) = q^{-2p}\Big(\sum_{i=1}^k q^{-2(c_i-r_i)}\Big)Y_{\nu(a)} = \chi_\nu(\mathrm{Tr}_R L)Y_{\nu(a)}. \tag{2.84}$$

Очевидно, что сумма содержимого всех клеток данной таблицы $\nu(a)$ (или сумма величин, обратных к содержимому) полностью определяется разбиением (то есть диаграммой Юнга) и одинаково для всех таблиц данной формы ν. Как следствие, характер $\chi_\nu(\mathrm{Tr}_R L)$ не зависит от конкретной таблицы (не зависит от номера a). Это, разумеется, находится в полном соответствии с эквивалентностью представлений $\rho_{\nu(a)}$, параметризуемых различными таблицами $\nu(a)$ одного и того же разбиения ν.

Простыми алгебраическими преобразованиями можно убедиться, что $\chi_\nu(\mathrm{Tr}_R L)$, равный сумме обратного содержимого всех клеток таблицы $\nu_{(a)}$, действительно записывается в виде (2.82). $\square$

Сформулируем теперь результат для модулей старшей размерности над алгеброй $\mathcal{SL}(R_q)$.

Утверждение 59 *Рассмотрим алгебру $\mathcal{SL}(R_q)$ (2.66) с Геккевской R-матрицей, обладающей рангом симметрии p. Пусть в пространстве V зафисирован некоторый базис e_i, $1 \le i \le n$ и в этом базисе задано базисное представление (2.61). Согласно Утверждению 55 тензорная степень $V^{\otimes k}$ также является $\mathcal{SL}(R_q)$-модулем для любого $k \in \mathbb{N}$. Справедливы следующие результаты:*

i) *Представление алгебры $\mathcal{SL}(R_q)$ в пространстве $V^{\otimes k}$ приводимо. В базисе $e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k}$ матрицы операторов, представляющих генераторы f_i^j алгебры $\mathcal{SL}(R_q)$ записываются в следующем виде:*

$$\bar{\rho}_k^t(f_i^j) = \frac{1}{\omega}\Big(\rho_k^t(l_i^j) - \frac{\delta_i^j}{p_q q^p}\mathcal{Z}_k\Big), \qquad \omega = \frac{q^{1-p}}{p_q}\,(q^{p-2}(p+1)_q - 1), \tag{2.85}$$

где индекс t означает матричное транспонирование, $\rho_k(l_i^j)$ определено в (2.72), а величина $\mathcal{Z}_k$ дается выражением:

$$\mathcal{Z}_k = I + \sum_{n=1}^{k-1} R^{-1}_{(n\to 1)} R^{-1}_{(1\to n)}.$$

ii) *Разложим тензорную степень $V^{\otimes k}$ в прямую сумму подпространств как указано в (2.73). Каждая компонента V_a^ν прямой суммы представляет собой $\mathcal{SL}(R_q)$ подмодуль в $V^{\otimes k}$. Генератор f_i^j представляется линейным оператором со следующей матрицей:*

$$\bar{\rho}^t_{\nu(a)}(f_i^j) = \frac{1}{\omega_\nu}\, Y_{\nu(a)}\Big[\rho_k^t(l_i^j) - \delta_i^j\,\frac{q^p}{p_q}\,\chi_\nu(s_1) I_{12\dots k}\Big] Y_{\nu(a)}, \qquad \omega_\nu = 1 - \lambda\,\frac{q^p}{p_q}\,\chi_\nu(s_1), \tag{2.86}$$

где характер $\chi_\nu(s_1)$ определен формулой (2.82). Модули, параметризуемые различными таблицами одного и того же разбиения $\nu \vdash k$, являются эквивалентными.

iii) *Спектр $\bar{\chi}$ центральных элементов $\bar{s}_m = \mathrm{Tr}_R F^m$ алгебры $\mathcal{SL}(R_q)$ $\bar{s}_m = \mathrm{Tr}_R F^m$ в представлениях $\bar{\rho}_{(k)}$ и $\bar{\rho}_{[k]}$, отвечающим разбиениям $\nu = (k)$ и $\nu = (1^k)$, принимает следующие значения:*

$$\bar{\chi}_{(k)}(\bar{s}_m) = q^{-p-m}\,\frac{k_q(p-1)_q(p+k)_q}{(p+k-1)_q}\,\frac{\Big[(p-1)_q^{m-1}(p+k)_q^{m-1} + (-1)^m k_q^{m-1}\Big]}{(q^{p-2}(p+k)_q - k_q)^m} \tag{2.87}$$

$$\bar{\chi}_{[k]}(\bar{s}_m) = q^{-p+m}\,\frac{k_q(p+1)_q(p-k)_q}{(p-k+1)_q}\,\frac{\Big[(p+1)_q^{m-1}(p-k)_q^{m-1} + (-1)^m k_q^{m-1}\Big]}{(q^{p+2}(p-k)_q + k_q)^m} \tag{2.88}$$

Доказательство. Справедливость данного утверждения прямо следует из Утверждений 55 и 56, Следствия 57 и формулы (2.70). В самом деле, операторы $\bar{\rho}_k(\mathrm{Tr}_R F)$ и $\bar{\pi}_{\nu(a)}(\mathrm{Tr}_R F)$ очевидно равны нулю. Основываясь на Утверждениях 55 и 56, можно проверить, что выражения (2.85) и (2.86) действительно удовлетворяют соотношениям (2.68), а множитель ω_ν^{-1} обеспечивает надлежащую нормировку правой части перестановочных соотношений (2.68).

Что же касается выражений (2.87) и (2.88), они могут быть проверены прямолинейными, достаточно объемными вычислениями, на основе формул (2.86), (2.77) и (2.78). $\square$

Для R-матрицы Дринфельда-Джимбо, происходящей из квантовой универсальной обертывающей алгебры $U_q(sl_n)$, ранг симметрии $p = n$ и в классическом пределе $q \to 1$ спектр (2.87), (2.88) центральных элементов $\mathcal{SL}(R_q)$ переходит в спектр элементов Казимира алгебры $U(sl_n)$ в соответствующем представлении (см., например, [1]).

И, в заключение, рассмотрим тензорное произведение двух неприводимых модулей V_μ и V_ν над алгеброй $\mathcal{L}(R_q, 1)$ (или над $\mathcal{SL}(R_q)$), в которых представления генераторов даются операторами (2.74) (или операторами (2.86)). Пользуясь изоморфизмом алгебры Гекке при общем значении параметра и групповой алгебры группы перестановок $\mathcal{H}_k(q) \cong \mathbb{C}[S_k]$, можно показать (см., например, работу [29]), что тензорное произведение $V_\mu \otimes V_\nu$ изоморфно (как модуль над алгеброй) прямой сумме модулей

$$V_\mu \otimes V_\nu \cong \bigoplus_\sigma c_{\mu\nu}^\sigma V_\sigma. \qquad (2.89)$$

В этой формуле целые числа $c_{\mu\nu}^\sigma$ представляют собой коэффициенты Литтвуда-Ричардсона, определяющие мультипликативную сткрутуру кольца симметрических функций Шура.

3 Квантовые многообразия

Термин “квантовое многообразие” будет означать некоторую некоммутативную алгебру, которая трактуется как квантование коммутативной алгебры функций на классическом многообразии. То есть, в отличие от классического случая, квантовое многообразие не имеет наглядного геометрического образа как, например, некоторой области или множества точек в евклидовом пространстве. В данном разделе этот подход применяется к квантованию полупростых орбит коприсоединенного действия группы $GL(m)$ на линейном пространстве $gl(m)^*$ — дуальном пространстве к алгебре Ли $gl(m)$. Напомним, что орбита называется полупростой. если она содержит диагонализуемую матрицу. Таким образом, набор собственных значений такой матрицы и их кратностей однозначно определяет орбиту.

Модифицированная алгебра уравнения отражений (2.33), задаваемая $U_q(sl(m))$ R-матрицей Дринфельда-Джимбо трактуется как квантованная алгебра регулярных функций $\mathbb{C}[gl(m)^*] \cong \mathrm{Sym}(gl(m))$ на дуальном пространстве к алгебре Ли $gl(m)$. Поэтому квантованные орбиты коприсоединенного действия $GL(m)$ на $gl(m)^*$ будут некоторыми фактор-алгебрами алгебры уравнения отражений.

3.1 Квазиклассическое приближение: пуассонова структура алгебры уравнения отражений

Прежде чем переходить к построению квантованных орбит, изучим пуассонову структуру на $\mathbb{C}[gl(m)^*]$, квановавние которой приводит к модифицированной алгебре уравнения отражений. Как известно, $U_q(sl(m))$ R-матрица Дринфельда-Джимбо имеет следующий вид:

$$R = q\sum_{i=1}^{m} h_i^i \otimes h_i^i + \sum_{i\neq j}^{m} h_i^j \otimes h_j^i + (q-q^{-1})\sum_{i<j}^{m} h_i^i \otimes h_j^j, \tag{3.1}$$

где h_i^j — матричная единица, то есть, $m \times m$ матрица, содержащая единственный ненулевой матричный элемент, равный единице, на пересечении i-й строки и j-го столбца. В пределе $q = 1$ эта матрица превращается в матрицу перестановки $P = \sum_{i,j=1}^{m} h_i^j \otimes h_j^i$.

Пользуясь явным видом R-матрицы, мы можем найти пучок скобок Пуассона, представляющий собой квазиклассический аналог двухпараметрической алгебры $\mathcal{L}(R_q, \hbar)$. Полагая с этой целью $q = 1$ в перестановочных соотношениях (2.33), мы перейдем от алгебры $\mathcal{L}(R_q, \hbar)$ к алгебре $U(gl(m)_\hbar)$. Следовательно, скобка Пуассона, отвечающая деформации по параметру $\hbar$ есть стандартная линейная скобка Пуассона-Ли на пространстве функций на $gl(m)^*$:

$$\{l_i^j, l_k^s\}_{PL} = \hbar\,(\delta_k^j l_i^s - \delta_i^s l_k^j).$$

Чтобы найти вторую скобку Пуассона, генерирующую пучок, положим $\hbar = 0$ в соотношении (2.33), переходя тем самым к алгебре $\mathcal{L}(R_q)$ немодифицированного уравнения отражений. Вводя матрицу $\mathcal{R} = PR$, перепишем перестановочные соотношения алгебры $\mathcal{L}(R_q)$ в следующей форме:

$$\mathcal{R}_{12}\, L_1\, \mathcal{R}_{21}\, L_2 - L_2\, \mathcal{R}_{12}\, L_1\, \mathcal{R}_{21} = 0\,, \tag{3.2}$$

где $\mathcal{R}_{21} = P_{12}\mathcal{R}_{12}P_{12}$. Полагая $q = e^{\nu}$ для некоторого $\nu \in \mathbb{C}$ и учитывая, что $\mathcal{R} = I$ при $q = 1$, мы получим разложение матрицы $\mathcal{R}$ в ряд по параметру ν: $\mathcal{R} = 1 + \nu\, \mathsf{r} + O(\nu^2)$, где

$$\mathsf{r} = \sum_{i=1}^{m} h_i^i \otimes h_i^i + 2\sum_{i<j}^{m} h_j^i \otimes h_i^j\,, \tag{3.3}$$

есть классическая $sl(m)$ r-матрица, удовлетворяющая уравнению

$$[\mathsf{r}_{12}, \mathsf{r}_{13}] + [\mathsf{r}_{12}, \mathsf{r}_{23}] + [\mathsf{r}_{13}, \mathsf{r}_{23}] = 0\,.$$

Выделив в (3.2) линейную по ν часть, мы получим вторую скобку Пуассона в пространстве $\mathbb{C}[gl(m)^*]$:

$$\{L_1, L_2\}_r = L_2L_1\mathsf{r}_{21} - \mathsf{r}_{12}L_1L_2 + L_2\mathsf{r}_{12}L_1 - L_1\mathsf{r}_{21}L_2\,. \tag{3.4}$$

Пока эта формула определена лишь на матричных элементах l_i^j матрицы L, которые образуют базис линейных функций на пространстве $gl(m)^*$. Расширение скобки (3.4) на произвольные полиномы от генераторов l_i^j производится с помощью векторных полей на $gl(m)^*$. Для получения указанного расширения определим матрицы

$$\mathsf{r}_{\pm} = \frac{1}{2}\,(\mathsf{r}_{12} \pm \mathsf{r}_{21})\,.$$

Из формулы (3.3) следует, что вновь введенные матрицы $\mathsf{r}_{\pm}$ являются образами матриц

$$r_- = \sum_{i<j}^{m}(e_j^i \otimes e_i^j - e_i^j \otimes e_j^i) := \sum_{i<j}^{m} e_j^i \wedge e_i^j\,, \quad r_+ = \sum_{i,j}^{m} e_i^j \otimes e_j^i\,, \quad r_{\pm} \in gl(m)^{\otimes 2} \tag{3.5}$$

относительно фундаментального векторного представления $e_i^j \mapsto h_i^j$, где элементы e_i^j образуют стандартный базис алгебры Ли $gl(m)$:

$$[e_i^j, e_k^r] = \delta_k^j\, e_i^r - \delta_i^r\, e_k^j\,.$$

Рассмотрим теперь действие алгебры $gl(m)$ на пространстве $\mathbb{C}[gl(m)^*]$ посредством левых, правых и присоединенных инвариантных векторных полей:

$$e_i^j \triangleright l_k^s := \delta_k^j\, l_i^s\,, \qquad l_k^s \triangleleft e_i^j := \delta_i^s\, l_k^j\,, \qquad \mathrm{ad}\, e_i^j(l_k^s) = e_i^j \triangleright l_k^s - l_k^s \triangleleft e_i^j\,, \tag{3.6}$$

которое расширяется на произвольный полином от генераторов l_i^j с помощью правила Лейбница. Тогда, принимая во внимание определения матриц $r_\pm$, мы можем переписать (3.4) в общем виде

$$\{f,g\}_r = \circ\, r_+^{\mathrm{l,r}}(f\otimes g) - \circ\, r_+^{\mathrm{r,l}}(f\otimes g) - \circ\, r_-^{\mathrm{ad,ad}}(f\otimes g), \qquad \forall\, f,g\in\mathbb{C}[gl(m)^*]. \quad (3.7)$$

Здесь $\circ : \mathbb{C}[gl(m)^*]^{\otimes 2}\to\mathbb{C}[gl(m)^*]$ символизирует коммутативное поточечное умножение функций на $gl(m)^*$, а верхние индексы матриц $r_\pm$ указывают на следующие типы действия

$$r_-^{\mathrm{ad,ad}}(f\otimes g) := \sum_{i<j}^{m} \mathrm{ad}\, e_j^i(f)\wedge \mathrm{ad}\, e_i^j(g), \quad r_+^{\mathrm{l,r}}(f\otimes g) := \sum_{i,j}(e_j^i \triangleright f)\otimes(g\triangleleft e_i^j)\,. \quad (3.8)$$

Заметим, что скобки

$$\{f,\, g\}_- = \circ\, r_-^{\mathrm{ad,ad}}(f\otimes g) \quad \text{и} \quad \{f,g\}_+ = \circ\, r_+^{\mathrm{l,r}}(f\otimes g) - \circ\, r_+^{\mathrm{r,l}}(f\otimes g)$$

по отдельности не являются Пуассоновыми, поскольку для них не удовлетворяется тождество Якоби.

Скобочная операция $\{\,\}_+$ является $gl(m)$-ковариантной, то есть

$$\mathrm{ad}\, X(\{f,g\}_+) = \{\mathrm{ad}\, X(f), g\}_+ + \{f, \mathrm{ad}\, X(g)\}_+, \qquad \forall f,g\in\mathbb{C}[gl(m)^*], \quad X\in gl(m)\,.$$

Скобка (3.7) ограничивается на любую $GL(m)$-орбиту $\mathcal{O}\subset gl(m)^*$, так как для любой функции $f\in I_{\mathcal{O}}$, где $I_{\mathcal{O}}$ есть идеал функций, зануляющихся на орбите, и произвольной функции $g\in\mathbb{C}[gl(m)^*]$ выполняется свойство

$$\{f,g\}_r\in I_{\mathcal{O}}\,.$$

Справедливость этого включения очевидна для компоненты $\{\,\}_-$, поскольку эта операция определяется через присоединенные векторные поля. Доказательство для компоненты $\{\,\}_+$ приведено в [19]. В частности, скобка (3.7) может быть ограничена на многообразие $c_1 := \sum l_i^i = c$, где $c\in\mathbb{C}$ есть некоторая константа. Полагая $c=0$, мы получим скобку Пуассона на алгебре функций $\mathbb{C}[sl(m)^*]$.

Замечание 60 Будучи ограниченной на алгебру $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$, где $\mathfrak{g}=sl(m)$, скобка $\{\,\}_+$ допускает следующую интерпретацию [26, 19]. Рассмотрим пространство $\mathfrak{g}^{\otimes 2}$ как присоединенный $\mathfrak{g}$-модуль. Оно разлагается в прямую сумму подмодулей

$$\mathfrak{g}^{\otimes 2} = \mathfrak{g}_s\oplus\mathfrak{g}_a\,,$$

где $\mathfrak{g}_s(\mathfrak{g}_a)$ является симметрическим (кососимметрическим) подпространством в $\mathfrak{g}^{\otimes 2}$. Для $m > 2$ существуют подпространства $\mathfrak{g}_+ \subset \mathfrak{g}_s$ и $\mathfrak{g}_- \subset \mathfrak{g}_a$, которые изоморфны самому $\mathfrak{g}$ как присоединенные $\mathfrak{g}$-модули. Следовательно, существует единственный (с точностью до множителя) нетривиальный $\mathfrak{g}$-ковариантный морфизм $\beta : \mathfrak{g}^{\otimes 2} \to \mathfrak{g}^{\otimes 2}$, отображающий $\mathfrak{g}_-$ в $\mathfrak{g}_+$.

Так как пространство линейных функций на $\mathfrak{g}^*$, наделенное скобкой Пуассона-Ли, изоморфно как алгебра Ли алгебре $\mathfrak{g}$, морфизм β определяется на всей алгебре $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$ (посредством правила Лейбница) и приводит к скобке, совпадающей (с точностью до множителя) со скобкой $\{\,\}_+$. Заметим, что для $m = 2$ компонента $\mathfrak{g}_+$ зануляется и поэтому зануляется и скобка $\{\,\}_+$.

Утверждение 61 *Скобка* (3.7) *совместна со скобкой Пуассона-Ли (их скобка Схоутена равна нулю) и, следовательно, соотношение*

$$\{\,,\}_{PL,r} = a\{\,,\}_{PL} + b\{\,,\}_r, \quad a, b \in \mathbb{C}$$

определяет пучок скобок Пуассона.

Хотя, в принципе, это утверждение непосредственно следует из того факта, что семейство алгебр $\mathcal{L}(R_q, \hbar)$ есть двухпараметрическая деформация коммутативной алгебры $\mathbb{C}[gl(m)^*]$, его можно проверить и прямыми расчетами [19].

Рассмотрим случай $m = 2$ более подробно. Как уже упоминалось выше, в этом случае компонента $\{\,\}_+$ скобки Пуассона $\{\,\}_r$ зануляется и мы имеем $\{\,\}_r = \{\,\}_-$. Обозначим символами $\{H, E, F\}$ генераторы Картана-Шевалье алгебры Ли $sl(2)$. Тогда $r_- = -E \wedge F$ (см. (3.5)) и скобка Пуассона (3.7) принимает вид:

$$\{a, b\}_r = \operatorname{ad} E(a) \operatorname{ad} F(b) - \operatorname{ad} F(a) \operatorname{ad} E(b)\,.$$

Выберем в алгебре $\mathbb{C}[sl(2)^*]$ генераторы $\{e, f, h\}$, которые соответствуют генераторам Картана-Шевалье при изоморфизме алгебры Ли $sl(2)$ и алгебры Ли линейных функций на пространстве $sl(2)^*$. Несложное вычисление на основе (3.6) дает

$$\{h, e\}_r = 2eh\,, \quad \{h, f\}_r = -2fh\,, \quad \{e, f\}_r = h^2\,.$$

Видно, что эти скобки отличаются от скобок Пуассона-Ли только множителем h и, следовательно, любой лист скобки $\{\,\}_r$ содержится в некотором листе скобки Пуассона-Ли. Кроме того, элемент $c_2 = h^2/2 + 2ef$ централен относительно обеих скобок, поэтому рассматриваемый пучок скобок Пуассона ограничивается на фактор-алгебру $\mathbb{C}[sl(2)^*]/\langle c_2 - c\rangle$ при любом значении $c \in \mathbb{C}$.

Рассмотрим генераторы алгебры $su(2)$:

$$x = \frac{1}{2}(e - f), \quad y = \frac{i}{2}(e + f), \quad z = \frac{i}{2}h .$$

В этих генераторах мы получаем пучок скобок Пуассона вида

$$\begin{aligned} &\{x, y\}_{PL} = z, \qquad &&\{y, z\}_{PL} = x, \qquad &&\{z, x\}_{PL} = y, \\ &\{x, y\}_r = z^2, \qquad &&\{y, z\}_r = xz, \qquad &&\{z, x\}_r = yz . \end{aligned}$$

Квадратичный центральный элемент записывается в виде $c_2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Частный случай скобки из рассматриваемого пучка (а именно, $\{\,\}_{PL} - \{\,\}_r$) появлялся в статье [87] (см. Приложение к этой работе, написанное J.-H.Lu и A. Вайнштейном) при изучении квазиклассического аналога квантовой сферы. В [87] функции на квантовой сфере были реализованы как элементы некоторой операторной алгебры. Этот подход основан на результатах статьи [76], где квантовая сфера трактовалась как C^*-алгебра и ее были классифицированы ее неприводимые представления (как C^*-алгебры). В конечном итоге, квантовая сфера в [87] была описана в терминах функционального анализа.

В данной работе предлагается другой метод построения квантовых многообразий. Проиллюстрируем этот метод на примере квантовой сферы (или квантового гиперболоида, что одно и то же над полем комплексных чисел). Прежде всего, мы квантуем скобку Кириллова-Костанта-Сурье[10] (сокращенно ККС) на сфере и реализуем квантовую алгебру в виде следующего фактора

$$U(su(2)_\hbar)/\langle x^2 + y^2 + z^2 - c\rangle\,, \quad c \in \mathbb{K}\,, \quad c \neq 0\,. \tag{3.9}$$

Далее мы интересуемся конечномерными представлениями данной фактор-алгебры. Как известно, существует набор отрицательных значений $c^{(k)} = -\hbar^2 k(k+2)/4$, $k \in \mathbb{N}$, таких что фактор-алгебра (3.9) обладает конечномерным представлением, если $c = c^{(k)}$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$.

Возвращаясь к генераторам алгебры $sl(2)$, мы получаем однопараметрическое семейство алгебр

$$\mathcal{SL}^c(\hbar) = U(sl(2)_\hbar)/\langle\frac{1}{2}H^2 + EF + FE - c\rangle\,.$$

[10]Напомним, что так называется ограничение скобки Пуассона-Ли на орбиту коприсоединенного действия группы Ли, расположенную в пространстве дуальном к ее алгебре Ли.

На любой алгебре $\mathcal{SL}^c(\hbar)$ из этого семейства, как и на алгебре

$$\mathcal{SL}^c = \mathbb{C}[sl(2)^*]/\langle \frac{h^2}{2} + ef + fe - c \rangle$$

может быть определено действие алгебры Ли $sl(2)$. Относительно этого действия алгебры $\mathcal{SL}^c$ и $\mathcal{SL}^c(\hbar)$ раскладываются в прямую сумму $sl(2)$-модулей, с кратностью слагаемых, не превышающей единицы:

$$\mathcal{SL}^c \cong \bigoplus_{k\geq 0} V_k$$

(аналогичное разложение имеет место для $\mathcal{SL}^c(\hbar)$).

Пусть $\alpha : \mathcal{SL}^c \to \mathcal{SL}^c(\hbar)$ есть $sl(2)$-инвариантное отображение, сопоставляющее элементу старшего веса $e^k \in \mathcal{SL}^c$ элемент $E^{\otimes k} \in \mathcal{SL}^c(\hbar)$. Это условие однозначно определяет отображение α. Теперь в коммутативной алгебре $\mathcal{SL}^c$ можно ввести новое некоммутативное умножение $\star$, приходящее из алгебры $\mathcal{SL}^c(\hbar)$

$$f \star_\hbar g = \alpha^{-1}(\alpha(f) \circ \alpha(g)), \qquad f, g \in \mathcal{SL}^c\,, \tag{3.10}$$

где $\circ$ символизирует операцию произведения в алгебре $\mathcal{SL}^c(\hbar)$. Таким образом, мы проквантовали скобку ККС на гиперболоиде $c_2 = c$ в духе деформационной схемы квантования — через введение нового произведения в исходном пространстве коммутативных функций. Заметим, что в соответствии с [82], наше алгебраическое квантование не расширяется на пространство функций $C^\infty[S^2]$.

Деформируем теперь алгебру $\mathbb{C}[sl(2)^*]$ "вдоль" параметров q и $\hbar$ одновременно. Мы получим алгебру $\mathcal{L}(R_q, \hbar)$ модифицированного уравнения отражений (2.33) с R-матрицей (3.1), где следует положить $m = 2$. Выделяя R-бесследовые элементы из набора четырех генераторов алгебры $\mathcal{L}(R_q, \hbar)$, придем к ассоциативной алгебре с единицей, порожденной тремя линейно независимыми элементами $\{\hat{H}, \hat{E}, \hat{F}\}$, удовлетворяющими перестановочным соотношениям вида

$$\begin{aligned}
&q^2\hat{H}\hat{E} - \hat{E}\hat{H} = 2_q\hbar\,\hat{E}\,,\\
&\hat{H}\hat{F} - q^2\hat{F}\hat{H} = -2_q\hbar\,\hat{F}\,,\\
&q(\hat{E}\hat{F} - \hat{F}\hat{E}) = \hat{H}\Big(\hbar - \frac{(q^2-1)}{2_q}\,\hat{H}\Big)\,.
\end{aligned}$$

Будем обозначать эту алгебру символом $\mathcal{SL}(q, \hbar)$. Ее центральный элемент $C_q = \frac{\hat{H}^2}{2_q} + q^{-1}\hat{E}\hat{F} + q\hat{F}\hat{E}$ будем называть *твистованным элементом Казимира*. Положим

$$\mathcal{SL}^c(q, \hbar) = \mathcal{SL}(q, \hbar)/\langle C_q - c \rangle\,.$$

Данную фактор-алгебру будем называть *квантовым гиперболоидом* или, рассматривая его над полем комплексных чисел, — квантовой сферой. Эта алгебра представляет собой двухпараметрическую деформацию исходной коммутативной алгебры $\mathcal{SL}^c$. Для значений параметра q из общего положения оказывается возможным определить отображение $\alpha_q : \mathcal{SL}^c \to \mathcal{SL}^c(q,\hbar)$, аналогичное отображению α (за исключением свойства эквивариантности) и представить новое произведение в алгебре $\mathcal{SL}^c$ аналогично соотношению (3.10).

Как и в случае алгебры (3.9), существует ряд значений параметра $c = c_k$, таких, что соответствующая фактор-алгебра $\mathcal{SL}^{c_k}(q,\hbar)$ обладает конечномерным эквивариантным представлением, описанным в разделе 2.4. При $q \to 1$ оно переходит в представление алгебры $\mathcal{SL}^{c_k}(\hbar)$. В отличие от рассматриваемого подхода, теория представлений квантовой сферы, предложенная в работе [76], не имеет ничего общего с теорией конечномерных представлений алгебры Ли $sl(2)$ (или $su(2)$).

В общем случае, квантуя скобку ККС на полупростой орбите, мы представляем квантовую алгебру в виде некоторого фактора обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g}_\hbar)$, где $\mathfrak{g} = gl(m)$ или $sl(m)$. Заметим, что если полупростая орбита не является орбитой общего положения, то задача нахождения определяющих соотношений соответствующей квантовой орбиты содержит некоторые тонкости (см. подробности в [18]). И, наконец, мы дополнительно деформируем эту фактор-алгебру в "q-направлении" и приходим к фактор-алгебре алгебры $\mathcal{L}(q,\hbar)$.

На орбите общего положения в пространстве $\mathfrak{g}^*$, где $\mathfrak{g}$ есть некоторая полупростая алгебра Ли, существует семейство неэквивалентных скобок Пуассона, приводящих после квантования к $U_q(\mathfrak{g})$-ковариантным алгебрам. Одна из них — редуцированная скобка Склянина. Она часто описывается в терминах разложения Брюа [62]. Классификация всех таких скобок и их деформационного квантования приведена в [14] и [19]. Редуцированная скобка Склянина может быть также проквантована в терминах так называемого расширения Хопфа-Галуа [12].

Однако, после ограничения на полупростую орбиту, из всего упомянутого выше семейства скобок только скобка вида (3.7) совместима со скобкой ККС, и квантование порожденного ими пучка скобок Пуассона может быть описано на языке алгебраической геометрии, то есть, в терминах некоторых генераторов и полиномиальных соотношений на них.

Заметим, что на сфере (гиперболоиде) редуцированная скобка Склянина совпадает с одной из скобок пучка $\{\,,\}_{KKS,r}$ (это справедливо и для любой симметрической орбиты). Поэтому, скобка Склянина может быть проквантована в различных подходах. Однако для $m > 2$ и для орбит старшей размерности понятие "квантовой орбиты" должно быть уточнено. Оно существенно зависит от типа скобки Пуассона на алгебре функций, подлежащей квантованию.

Что же касается других классических полупростых алгебр $\mathfrak{g}$, относящихся к сериям B, C или D, двухпараметрической деформации алгебры $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$ не существует [19]. Хотя мы и можем в этой ситуации определить квадратично-линейную алгебру, аналогичную алгебре $\mathcal{L}(R_q, \hbar)$ (подробности см. в [13]), но ни эта алгебра, ни ассоциированная с ней квадратичная алгебра не будут деформацией соответствующих классических объектов.

3.2 Квантовые многообразия как фактор-алгебры

Рассмотрим теперь способ построения квантовых орбит (квантованных алгебр функций на орбитах) как фактор-алгебр алгебры уравнения отражений. На этом же пути можно построить и квантование линейных расслоений на орбитах.

3.2.1 Квантовые многообразия в $U(gl(m)_\hbar)$

Естественно начать построения с более простой ситуации — квантования пуассоновой алгебры функций на орбите со скобкой Кириллова-Костанта-Сурье (ограничение скобки Пуассона-Ли на орбиту коприсоединенного действия группы). Двухпараметрическое квантование всего пучка скобок Пуассона на алгебре $\mathbb{K}[gl(m)^*]$ будет рассмотрено в следующем разделе. Далее везде символом $\mathbb{K}$ будет обозначаться числовое поле комплесных чисел $\mathbb{C}$ или вещественных чисел $\mathbb{R}$.

Опишем вначале исходный классический объект — координатную алгебру коприсоединенной орбиты общего положения. Зафиксируем диагональную матрицу

$$M = \mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_m), \quad \mu_i \in \mathbb{C} \tag{3.11}$$

с простыми (не кратными) собственными значениями μ_i. Будем трактовать эту матрицу как элемент пространства $\mathfrak{g}^* = gl(m)^*$ (отождествляемого с пространством $\mathfrak{g} = gl(m)$) и рассмотрим орбиту $\mathcal{O}_M$ этой матрицы относительно (ко)присоединенного действия группы $GL(m)$:

$$M \mapsto M_g = g^{-1} M\, g, \quad g \in GL(m). \tag{3.12}$$

Орбита $\mathcal{O}_M$ — замкнутое аффинное алгебраическое многообразие и его координатная алгебра $\mathbb{K}(\mathcal{O}_M)$ может быть описана следующим образом. Пусть $\mathbb{K}(\mathfrak{g}^*)$ есть полиномиальная алгебра, порожденная m^2 коммутирующими элементами l_i^j, $1 \le i, j \le m$, которые представляют собой координатные функции. Тогда, как хорошо известно, $\mathbb{K}(\mathcal{O}_M) = \mathbb{K}(\mathfrak{g}^*)/\mathcal{I}$, где $\mathcal{I} \subset \mathbb{K}(\mathfrak{g}^*)$ является идеалом, порожденным следующими элементами

$$\operatorname{Tr} L^k - \beta_k, \quad k = 1, 2, \ldots, m. \tag{3.13}$$

В этой формуле матрица $L = \|l_i^j\|$ составлена из l_i^j (i нумерует строки, а j — столбцы матрицы), а коеэффициенты β_k определяются по правилу

$$\beta_k = \sum_{i=1}^{m} \mu_i^k, \quad k = 1, 2, \ldots, m. \tag{3.14}$$

Замечание 62 Если полупростая орбита $\mathcal{O}_M$ не является орбитой общего положения (то есть, у матрицы M имеются кратные собственные значения μ_i), то ее координатная алгебра задается аналогичным фактором $\mathbb{K}(\mathcal{O}_M) = \mathbb{K}(\mathfrak{g}^*)/\mathcal{I}'$, но идеал $\mathcal{I}'$ устроен немного по-другому. Введем минимальный многочлен матрицы M

$$\mathcal{P}(M) = (M - \mu_1 I) \ldots (M - \mu_r I),$$

где символ I обозначает единиичную $m \times m$ матрицу. Тогда m^2 матричных элементов матрицы $\mathcal{P}(L)$ представляют собой полиномы от генераторов l_i^j. Идеал $\mathcal{I}'$ порождается этими полиномами и, кроме того, элементами (3.13), где индекс k пробегает только независимые степени матрицы L: $k = 1, \ldots, r-1$. Отметим, что если мы отбросим эти дополнительные порождающие соотношения на следы матрицы L, то фактор по идеалу $\mathcal{I}'$,будет описывать координатную алгебру объединения полупростых орбит, обладающих одним и тем же минимальным многочленом.

Если исходная матрица M такова, что $\operatorname{Tr} M = 0$, то соответствующая орбита вкладывается в пространство $sl(m)^*$. В силу соотношения

$$\mathbb{K}(sl(m)^*) = \mathbb{K}(gl(m)^*)/\langle \operatorname{Tr} L \rangle,$$

координатная алгебра соответствующей орбиты может быть реализована вышеописанным способом с дополнительным условием $\beta_1 = 0$.

Если все собственные значения матрицы M вещественны, можно перейти к матрице $\mathrm{i}M$, где $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$, которая может рассматриваться как элемент пространства $u(m)^*$ (или $su(m)^*$, если $\mathrm{Tr}\, M = 0$). Выбрав генераторы x_i^j для $i \le j$ и y_i^j для $i > j$ так, чтобы выполнялись соотношения

$$l_i^j = x_i^j + \mathrm{i} y_i^j \quad \text{для} \quad i < j, \qquad l_i^j = x_j^i - \mathrm{i} y_j^i \quad \text{для} \quad i > j, \qquad\qquad l_i^i = x_i^i,$$

мы получим компактное вещественное многообразие, являющееся $SU(m)$-орбитой (то есть, в (3.12) мы предполагаем, что $g \in SU(m)$). Следовательно, мы рассматриваем его координатную алгебру как алгебру над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$.

Перейдем теперь к построению орбит, которые будут реализованы через фактор-алгебры квантованной алгебры функций на $gl(m)^*$. Двусторонние идеалы, задающие соответствующие фактор-алгебры, порождаются некоторыми явными соотношениями на генераторы. Обратимся снова к матрице $L = \|l_i^j\|$, но теперь будем считать, что генераторы l_i^j удовлетворяют определяющим соотношениям алгебры $U(\mathfrak{g}_\hbar)$, где $\mathfrak{g} = gl(m)$:

$$l_i^j\, l_m^n - l_m^n\, l_i^j - \hbar(l_i^n\, \delta_m^j - l_m^j\, \delta_i^n) = 0.$$

Матрица $L \in \mathrm{Mat}_n(U(\mathfrak{g}_\hbar))$ удовлетворяет полиномиальному тождеству:

$$\mathcal{CH}(L) = \sum_{k=0}^{m} (-L)^{m-k} \sigma_k(L) = 0, \tag{3.15}$$

причем коэффициенты $\sigma_k(L)$ принадлежат центру алгебры $U(\mathfrak{g}_\hbar)$, и $\sigma_0(L) = 1$ по определению. Явное выражение коэффициентов $\sigma_k(L)$ через генераторы l_i^j приведено в работе [39].

Как известно, центр $Z(U(\mathfrak{g}_\hbar))$ алгебры $U(\mathfrak{g}_\hbar)$ порождается элементами $\sigma_k(L)$ при $1 \le k \le m$. Другой набор генераторов центра дается полиномами $s_k(L) = \mathrm{Tr} L^k$, $1 \le k \le m$. Таким образом, любой характер центра

$$\chi: \; Z(U(\mathfrak{g}_\hbar)) \to \mathbb{K}$$

полностью определяется своими значениями на генераторах центра $\chi(\sigma_k(L)) = \alpha_k$ или $\chi(s_k(L)) = \beta_k$, $k = 1, \ldots, m$.

Рассмотрим фактор-алгебру

$$\mathcal{L}_\hbar^\chi = U(\mathfrak{g}_\hbar)/\{z - \chi(z) \mid z \in Z(U(\mathfrak{g}_\hbar))\}, \tag{3.16}$$

где χ — некоторый фиксированный характер. Для алгебры $\mathcal{L}_\hbar^\chi$ соотношение (3.15) принимает следующий вид

$$\mathcal{CH}^\chi(L) \stackrel{\rm def}{=} \sum_{k=0}^{n}(-L)^{n-k}\chi(\sigma_k(L)) = \sum_{k=0}^{n}(-L)^{n-k}\alpha_k = 0. \qquad (3.17)$$

В дальнейшем индекс χ будет обозначать переход от алгебры $U(\mathfrak{g}_\hbar)$ к алгебре $\mathcal{L}_\hbar^\chi$.

Рассмотрим теперь соответствующее числовое уравнение:

$$\sum_{k=0}^{n}(-\mu)^{n-k}\alpha_k = 0. \qquad (3.18)$$

Обозначим его корни символами μ_i. Тогда для коэффициентов α_k уравнения получаем такое выражение

$$\alpha_k = \chi(\sigma_k) = \sum_{1\le i_1<i_2<\dots<i_k\le n} \mu_{i_1}\mu_{i_2}\dots\mu_{i_k}. \qquad (3.19)$$

Ниже (до конца этого раздела) мы будем полагать числа $\mu_i \in \mathbb{K}$ заданными и характер χ фиксированным набором значений (3.19).

Определение 63 *Корни уравнения (3.18) назовем собственными значениям матрицы L на орбите $\mathcal{L}_\hbar^\chi$ (то есть, когда матричные элементы L принадлежат алгебре $\mathcal{L}_\hbar^\chi$). Алгебра $\mathcal{L}_\hbar^\chi$ называется 1-орбитой общего положения если собственные значения μ_i попарно различны (простые корни).*

В дальнейшем мы будем рассматривать только 1-орбиты общего положения, не упоминая этого каждый раз. Отметим, что такие орбиты могут возникать при квантовании простых орбит не в общем положении (то есть классических орбит, состоящих из матриц с кратными собственными значениями (см. замечание 71 ниже)).

Для любой орбиты, заданной набором собственных значений μ_i, введем n идемпотентов:

$$e_j = \prod_{i\neq j}\frac{(L-\mu_i\mathbf{I})}{(\mu_j-\mu_i)}, \qquad j = 1,\dots,n. \qquad (3.20)$$

Из тождества (3.17) следует, что

$$e_i\, e_j = \delta_{ij}\, e_i, \qquad \sum_{i=1}^{n} e_i = \mathbf{I}.$$

Тождество Гамильтона-Кэли (3.15) и все связанные с ним объекты (идемпотенты (3.20), соответствующие проективные $\mathcal{L}_\hbar^\chi$-модули и т.п.) будут называться *базисными*.

Опишем теперь регулярный метод построения некоторых *старших* аналогов этих объектов. С этой целью отбратимся к категории конечномерных представлений алгебры $U(\mathfrak{g})$. Простые объекты V_λ этой категории нумеруются последовательностью чисел

$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n), \tag{3.21}$$

где разности $\lambda_i - \lambda_{i+1}$ являются неотрицательными целыми числами. Как известно (см. [96]), такие последовательности называются *сигнатурами*. Если, помимо этого, сами числа λ_i являются неотрицательными целыми и $\sum \lambda_i = m$, то соответствующая сигнатура называется упорядоченным разбиением натурального числа m. Поскольку алгебры $U(\mathfrak{g}_\hbar)$ и $U(\mathfrak{g})$ — изоморфны, то на пространствах V_λ можно задать действие $U(\mathfrak{g}_\hbar)$.

Рассмотрим неприводимый $U(\mathfrak{g}_\hbar)$-модуль V_λ и обозначим символом π_λ отображение, реализующее соответствующее представление

$$\pi_\lambda:\ U(\mathfrak{g}_\hbar) \to \mathrm{End}\,(V_\lambda).$$

Все представления предполагаются эквивариантными, то есть, коммутирующими с присоединенным действием группы $GL(n)$ на алгебре $U(\mathfrak{g}_\hbar)$.

Определим, также, отображение следующего вида:

$$\pi_\lambda^{(2)} = \mathbf{I} \otimes \pi_\lambda: \quad U(\mathfrak{g}_\hbar) \otimes U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g}_\hbar) \otimes \mathrm{End}\,(V_\lambda),$$

где во втором сомножителе тензорного произведения универсальных обертывающих алгебр значение параметра $\hbar$ выбрано равным единице. Зафиксировав в пространстве V_λ некоторый базис, мы отождествляем пространство линейных операторов $\mathrm{End}\,(V_\lambda)$ и пространство $n_\lambda \times n_\lambda$ матриц $\mathrm{Mat}_{n_\lambda}(\mathbb{K})$, где $n_\lambda = \dim V_\lambda$. Как следствие, пространства

$$U(\mathfrak{g}_\hbar) \otimes \mathrm{End}\,(V_\lambda) \quad \text{и} \quad U(\mathfrak{g}_\hbar) \otimes \mathrm{Mat}_{n_\lambda}(\mathbb{K}) = \mathrm{Mat}_{n_\lambda}(U(\mathfrak{g}_\hbar)) \tag{3.22}$$

также могут быть отождествлены. Поэтому определенное выше отображение $\pi_\lambda^{(2)}$ можно трактовать как отображение вида

$$\pi_\lambda^{(2)}: \quad U(\mathfrak{g}_\hbar) \otimes U(\mathfrak{g}) \to \mathrm{Mat}_{n_\lambda}(U(\mathfrak{g}_\hbar)).$$

Замечание 64 Заметим, что пространства V_λ и V_μ, сигнатуры которых отличаются на постоянный сдвиг

$$\lambda_i - \mu_i = z, \quad 1 \leq \forall\, i \leq n, \quad z \in \mathbb{K}$$

имеют одинаковую размерность: $n_\lambda = n_\mu$. Совершив невырожденное преобразование

$$\pi_\lambda(e_i^j) \mapsto \pi_\lambda(e_i^j) - z\,\delta_i^j \mathrm{id}_{V_\lambda} \quad \forall\, z \in \mathbb{K}, \tag{3.23}$$

где e_i^j представляют собой генераторы алгебры $U(gl(n))$, мы переведем $U(gl(n))$-представление π_λ в представление π_μ. В частности, полагая $z = \lambda_n$ мы получим представление $\pi_{\hat{\lambda}}$, где сигнатура $\hat{\lambda}$ представляет собой *разбиение* вида

$$\hat{\lambda} = (\hat{\lambda}_1, \ldots, \hat{\lambda}_{n-1}, 0), \quad \hat{\lambda}_i = \lambda_i - \lambda_n \in \mathbb{N}. \tag{3.24}$$

Отметим, что пространства V_λ и $V_{\hat{\lambda}}$ отличаются как $U(gl(n))$-модули, но совпадают как $U(sl(n))$-модули. В силу этого $\dim V_\lambda = \dim V_{\hat{\lambda}}$.

Кроме того, в категории конечномерных $U(gl(n))$-модулей пространство V_λ^*, дуальное к V_λ), представляется пространством V_{λ^*}, где сигнатура λ^* определяется следующим образом:

$$\lambda^* = (-\lambda_n, \ldots, -\lambda_1). \tag{3.25}$$

Применим отображение $\pi_\lambda^{(2)}$ к так называемому расщепленному элементу Казимира

$$\mathbf{Cas} = l_i^j \otimes l_j^i, \tag{3.26}$$

где подразумевавется суммирование по повторяющимся индексам. Для значения параметра $\hbar = 1$ образ расщепленного элемента Казимира относительно операции умножения в обертывающей алгебре $U(\mathfrak{g})^{\otimes 2} \to U(\mathfrak{g})$ совпадает с обычным квадратичным элементиом Казимира $s_2 = \mathrm{Tr}(L^2) \in U(\mathfrak{g})$. Обозначим матрицу, транспонированную к матрице $\pi_\lambda^{(2)}(\mathbf{Cas})$, символом L_λ:

$$L_\lambda^t = \pi_\lambda^{(2)}(\mathbf{Cas}) = l_i^j \otimes \pi_\lambda(l_j^i).$$

Легко видеть, что для разбиения $\lambda_0 = (1, 0, \ldots, 0)$ мы получим $L_{\lambda_0} = L$, при условии, что на базисные элементы $\{x_i\} \in V$ пространства V линейные операторы $\pi_{\lambda_0}(l_i^j)$ деействуют следующим образом: $\pi_{\lambda_0}(l_i^j) \triangleright x_k = \delta_k^j x_i$.

Подчеркнем, что матрица $\pi_\lambda^{(2)}(\mathbf{Cas})$ принадлежит $GL(n)$-инвариантной подалгебре алгебры $\mathrm{Mat}_{n_\lambda}(U(\mathfrak{g}_\hbar))$. Это следует из эквивариантности представлений π_λ :

$U(\mathfrak{g}_\hbar) \to \mathrm{End}\,(V_\lambda) = \mathrm{Mat}_{n_\lambda}(\mathbb{K})$. Здесь подразумевается, что действие группы $GL(n)$ на алгебре $\mathrm{Mat}_{n_\lambda}(U(\mathfrak{g}_\hbar))$ определяется на основе идентификации (3.22).

Пример. Рассмотрим простой случай $n = 2$. Тогда расщепленный элемент Казимира имеет следующий явный вид:

$$\mathbf{Cas} = a \otimes a + b \otimes c + c \otimes b + d \otimes d, \quad \text{где} \quad a = l_1^1, \quad b = l_1^2, \quad c = l_2^1, \quad d = l_2^2.$$

Выберем сигнатуру $\lambda = (l+1, l)$, $l \in \mathbb{K}$, и рассмотрим соответствующее представление π_λ of $U(gl(2))$:

$$\pi_\lambda(a) = \begin{pmatrix} 1+l & 0 \\ 0 & l \end{pmatrix}, \quad \pi_\lambda(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \pi_\lambda(c) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \pi_\lambda(d) = \begin{pmatrix} l & 0 \\ 0 & 1+l \end{pmatrix}.$$

Отвечающая такой сигнатуре матрица L_λ имеет вид

$$L_\lambda = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + l(a+d) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Если $l = 0$, то получается просто матрица L.

Далее мы ограничимся случаем однострочных разбиений

$$\lambda = (m) = (m, 0, 0, \ldots, 0)$$

Соответствующие матрицы и другие связанные объекты будем обозначать $L_{(m)}$, $\pi_{(m)}$, $V_{(m)}$, и так далее.

Матрица $L_{(m)}$ так же как и $L = L_{(1)}$ удовлетворяет полиномиальному тождеству Гамильтона-Кэли. Опишем структуру соответствующего полинома,

В дальнейшем мы будем пользоваться набором всевозможных неупорядоченных разбиений целого числа m, длина которых не превышает n. Иными словами, мы будем рассматривать целочисленные вектора $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ с компонентами k_i, обладающие следующими свойствами:

$$\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n), \quad k_i \geq 0, \quad |\mathbf{k}| = k_1 + \cdots + k_n = m. \tag{3.27}$$

Для любого такого неупорядоченного разбиения $\mathbf{k} \vdash m$ из набора (3.27) обозначим

$$\mu_{\mathbf{k}}(m) = \sum_{i=1}^{n} k_i \mu_i + \hbar \sum_{1 \leq i < j \leq n} k_i k_j, \tag{3.28}$$

где μ_i, $1 \le i \le n$, принадлежат алгебраическому замыканию центра универсальной обертывающей алгебры $Z(U(\mathfrak{g}_\hbar))$. Эти величины представляют собой решения системы полиномиальных уравнений

$$\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} \mu_{i_1}\mu_{i_2}\ldots\mu_{i_k} = \sigma_k(L), \quad 1 \le k \le n, \tag{3.29}$$

где $\sigma_k(L)$ есть коэффициент базового полинома Гамильтона-Кэли (3.15).

Введем теперь полином

$$\mathrm{ch}_{(m)}(x) = \prod_{\mathbf{k}\vdash m}(x - \mu_{\mathbf{k}}(m)). \tag{3.30}$$

Коэффициенты этого полинома являются симметрическими функциями от величин μ_i и могут быть выражены через элементарные симметрические фунции. В силу (3.29) эти коэффициенты принадлежат центру универсальной обертывающей алгебры $Z(U(\mathfrak{g}_\hbar))$. Кроме того, $\deg \mathrm{ch}_{(m)}(x) = \dim V_{(m)}$.

Утверждение 65 [41] *Определенный формулой (3.30) полином* $\mathrm{ch}_{(m)}(x)$ *является полиномом Гамильтона-Кэли для матрицы* $L_{(m)}$, *то есть, справедливо тождество*

$$\mathrm{ch}_{(m)}(L_{(m)}) \equiv 0.$$

Подробное доказательство утверждения приведено в работе[41].

На 1-орбитах общего положения $\mathcal{L}_\hbar^\chi$ (3.16) мы фиксируем собственные значения μ_i матрицы L (см. (3.19)) и, посредством этого, зачения величин $\mu_{\mathbf{k}}(m)$. Аналогично случаю $m = 1$, величины $\mu_{\mathbf{k}}(m)$ будем называть собственными значениями матрицы $L_{(m)}$ на орбите $\mathcal{L}_\hbar^\chi$. Кроме того, в целях введения единообразия в обозначениях, мы полагаем $\mu_{\mathbf{k}}(1) = \mu_i$ для $|\mathbf{k}| = 1$ и $k_j = \delta_{i,j}$.

Определение 66 *Для данного натурального числа m орбита будет называться m-орбитой, если она является 1-орбитой общего положения и собственные значения $\mu_{\mathbf{k}}(m)$ не вырождены. Орбита будет называться орбитой общего положения, если она является m-орбитой для любого натурального m.*

Для произвольной m-орбиты построим $n_m = \dim V_{(m)} = \begin{pmatrix} n+m \\ m \end{pmatrix}$ идемпотентов следующим образом:

$$e_{\mathbf{k}}(m) = \prod_{\mathbf{k}'\neq\mathbf{k}} \frac{(L_{(m)} - \mu_{\mathbf{k}'}(m)\mathbf{I})}{(\mu_{\mathbf{k}}(m) - \mu_{\mathbf{k}'}(m))}. \tag{3.31}$$

Следующее утверждение является простым следствием тождества Гамильтона-Кэли $\mathcal{CH}^{\chi}{}_{(m)}(L_{(m)}) = 0$ и может интерпретироваться как некоммутативная версия спектрального разложения.

Утверждение 67 *Для произвольной m-орбиты $\mathcal{L}_{\hbar}^{\chi}$, задаваемой собственными значениями μ_i, $1 \leq i \leq n$, существуют величины $d_{\mathbf{k}}(m)$, такие, что*

$$\mathrm{Tr}\, L_{(m)}^s = \sum_{|\mathbf{k}|=m} \mu_{\mathbf{k}}(m)^s\, d_{\mathbf{k}}(m), \qquad \forall\, s \geq 1,$$

где $\mu_{\mathbf{k}}(m)$ определяются формулой (3.28). Кроме того, справедливо соотношение:

$$d_{\mathbf{k}}(m) = \mathrm{Tr}\, e_{\mathbf{k}}(m).$$

Величины $d_{\mathbf{k}}(m)$ будем называть *квантовыми кратностями.* Их точное значение для m-орбит дается следующим утверждением.

Утверждение 68 *Для произвольной m-орбиты $\mathcal{L}_{\hbar}^{\chi}$ задаваемой собственными значениями μ_i, $\leq i \leq n$, квантовые кратности имеют следующий вид:*

$$d_{\mathbf{k}}(m) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\mu_i - \mu_j - (k_i - k_j)\hbar}{\mu_i - \mu_j}. \tag{3.32}$$

Таким образом, следы степеней матрицы $L_{(m)}$ записываются в виде:

$$\mathrm{Tr}\, L_{(m)}^s = \sum_{|\mathbf{k}|=m} (\sum_{i=1}^{n} k_i \mu_i + \hbar \sum_{1 \leq i < j \leq n} k_i k_j)^s \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\mu_i - \mu_j - (k_i - k_j)\hbar}{\mu_i - \mu_j}. \tag{3.33}$$

Доказательство утверждения подробно изложено в работе [41].

Если $m = 1$, то формула (3.33) упрощается:

$$\mathrm{Tr}\, L^s = \sum_{j=1}^{n} \mu_j^s \prod_{i \neq j} \frac{\mu_j - \mu_i - \hbar}{\mu_j - \mu_i}. \tag{3.34}$$

Полагая в этой формуле $\hbar = 1$ и $\mu_i = \lambda_{n-i+1} + i - 1$. мы воспроизведем результат, полученный в работе [2].

В следующем разделе будут приведены q-обобщения этих соотношений.

3.2.2 Квантовые орбиты при $q \neq 1$.

В данном разделе мы будем работать с алгеброй уравнения отражений, когда параметр $q \neq 1$ фиксирован в общем положении. Введем некоторые удобные обозначения. Символом $\mathfrak{D}(t_1, t_2, \dots, t_n)$ будем обозначать определитель Вандермонда:

$$\mathfrak{D}(t_1, t_2, \dots, t_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ t_1 & t_2 & \dots & t_n \\ t_1^2 & t_2^2 & \dots & t_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_1^{n-1} & t_2^{n-1} & \dots & t_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i>j}(t_i - t_j),$$

где буквы t_i представляют собой набор некоторых коммутирующих переменных, например, набор элементов некоторой коммутативной алгебры (кольца).

Кроме того, будем рассматривать элементарные симметрические функции от переменных t_i (стандартное определение из [65]):

$$e_0 \equiv 1, \quad e_k = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} t_{i_1} t_{i_2} \dots t_{i_k}, \quad 1 \le k \le n. \tag{3.35}$$

С каждой элементарной симметрической функцией e_k свяжем серию величин такого вида:

$$e_k(\hat{t}_i) \stackrel{\text{def}}{=} e_k|_{t_i=0}, \quad e_k(\hat{t}_i, \hat{t}_j) \stackrel{\text{def}}{=} e_k|_{t_i=0, t_j=0}, \quad 1 \le i, j \le n, \quad \text{и так далее.} \tag{3.36}$$

Очевидно, что $e_k(\hat{t}_i)$ является k-й элементарной симметрической функцией от набора $(n-1)$ переменной t_j, $j \neq i$, то есть, набора, не содержащего t_i, и так далее. Элементарно проверяются следующие свойства всех введенных выше объектов:

$$e_k = e_k(\hat{t}_i) + t_i e_{k-1}(\hat{t}_i), \tag{3.37}$$

$$e_k(\hat{t}_i) - e_k(\hat{t}_j) = (t_j - t_i) e_{k-1}(\hat{t}_i, \hat{t}_j) \tag{3.38}$$

$$k e_k = \sum_{i=1}^{n} t_i e_{k-1}(\hat{t}_i). \tag{3.39}$$

В равенствах первых двух строк предполагается, что $1 \le k \le n$ и $1 \le i, j \le n$. Столь же просто — индукцией по размеру детерминанта — доказывается приведенная ниже лемма.

Лемма 69

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ e_1(\hat{t}_1) & e_1(\hat{t}_2) & \dots & e_1(\hat{t}_n) \\ e_2(\hat{t}_1) & e_2(\hat{t}_2) & \dots & e_2(\hat{t}_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_{n-1}(\hat{t}_1) & e_{n-1}(\hat{t}_2) & \dots & e_{n-1}(\hat{t}_n) \end{vmatrix} = \prod_{i<j}(t_i - t_j) \equiv \mathfrak{D}(t_n, t_{n-1}, \dots, t_1).$$

Следует обратить внимание на обратный порядок следования аргументов в $\mathfrak{D}$ в условии леммы по сравнению с определением этого детерминанта в начале раздела.

Рассмотрим два набора независимых центральных элементов немодифицированной алгебры уравнения отражений $\mathcal{L}_q$:

$$\sigma_k(\hat{L}) = q^k \,\mathrm{Tr}_{R(12\dots k)} A^{(k)} \hat{L}_{\bar{1}} \dots \hat{L}_{\bar{k}}, \quad \text{и} \quad s_k(\hat{L}) = q\,\mathrm{Tr}_R \hat{L}^k, \quad 1 \le k \le p,$$

где матрица $\hat{L}_{\bar{k}}$ определена обычным образом:

$$\hat{L}_{\bar{1}} = \hat{L}_1, \quad \hat{L}_{\bar{k}} = R_{k-1} \hat{L}_{\overline{k-1}} R^{-1}_{k-1}, \quad k \ge 2.$$

Положим, также, по определению:

$$\sigma_0(\hat{L}) = s_0(\hat{L}) = \mathrm{id}_{\mathcal{L}}.$$

Эти наборы центральных элементов связаны квантовыми соотношениями Ньютона [32, 79]

$$\begin{array}{rcl} s_1 &=& \sigma_1 \\ -\, s_2 + s_1\sigma_1 &=& 2_q q^{-1}\,\sigma_2 \\ s_3 - s_2\sigma_1 + s_1\sigma_2 &=& 3_q q^{-2}\,\sigma_3 \\ \dots & \dots & \dots \\ (-1)^{p-1}s_p + (-1)^{p-2}s_{p-1}\sigma_1 + \dots + s_1\sigma_{p-1} &=& p_q q^{1-p}\,\sigma_p \end{array} \tag{3.40}$$

Пользуясь этими соотношениями, можно, в принципе, выразить "степенные суммы" s_k в терминах σ_i, $1 \le i \le k$. Но получающиеся формулы очень сложны и не дают никаких преимуществ при работе с $\mathrm{Tr}_R\hat{L}^k$. Поэтому, вместо явного выражения одних центральных элементов через другие, мы воспользуемся удобным параметрическим разрешением системы квантовых тождеств Ньютона.

А именно, представим элементы $\sigma_k(\hat{L})$ в виде, аналогичном формуле (3.35):

$$\sigma_k(\hat{L}) = \sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le p} \mu_{i_1}\mu_{i_2}\dots\mu_{i_k}, \quad 1\le k\le p. \tag{3.41}$$

Здесь величины μ_i, $1\le i\le p$, принадлежат алгебраическому замыканию центра алгебры уравнения отражений. При переходе к орбите $\mathcal{L}_q^\chi$, элементы μ_i приравниваются фиксированным попарно различным числам из основного поля. Это автоматически дает 1-орбиту общего положения в терминологии предыдущего раздела 3.2.1.

Упомянутое выше параметрическое разрешение тождеств (3.40) дается следующим утверждением.

Утверждение 70 *Пусть центральные элементы $\sigma_k(\hat{L})$ параметризованы соотношениями (3.41). Тогда*

$$q^{-1}s_k(\hat{L}) \equiv \mathrm{Tr}_R(\hat{L}^k) = q^{-p}\sum_{i=1}^{p}\mu_i^k d_i, \tag{3.42}$$

где

$$d_i = \prod_{j\ne i}^{p} \frac{q\mu_i - q^{-1}\mu_j}{\mu_i-\mu_j}. \tag{3.43}$$

Доказательство. Введем обозначение

$$x_i = q^{1-p}d_i = \prod_{j\ne i}^{p}\frac{\mu_i - q^{-2}\mu_j}{\mu_i-\mu_j}.$$

Теперь необходимо доказать, что $s_k = \sum \mu_i^k x_i$ является решением системы равенств (3.40), при условии, что σ_k параметризованы в соответствии с (3.41).

Прежде всего, отметим следующее представление для x_i, прямо следующее из определениия этой величины:

$$x_i = q^{(p-1)(p-2)}\,\frac{\mathfrak{D}(q^{-2}\mu_1, q^{-2}\mu_2,\dots,\mu_i,\dots,q^{-2}\mu_p)}{\mathfrak{D}(\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_p)}. \tag{3.44}$$

Подставим теперь анзац $s_k = \sum\mu_i^k x_i$ в систему квантовых тождеств Ньютона и докажем, что получившаяся сиистема линейных уравнений на переменные x_i имеет единственное решение, совпадающее с (3.44).

Пользуясь формулами (3.37) и (3.41), преобразуем систему тождеств (3.40) к такому виду:

$$\sum_{i=1}^{p} \mu_i \sigma_{k-1}(\hat{\mu}_i) x_i = k_q q^{1-k}\, \sigma_k, \qquad 1 \le k \le p, \tag{3.45}$$

где величины $\sigma_k(\hat{\mu}_i)$ имеют тот же смысл, что и $e_k(\hat{t}_i)$ в (3.36).

Это система линейных уравнений со следующим детерминантом:

$$\Delta(\mu) = \begin{vmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_p \\ \mu_1\sigma_1(\hat{\mu}_1) & \mu_2\sigma_1(\hat{\mu}_2) & \dots & \mu_p\,\sigma_1(\hat{\mu}_p) \\ \mu_1\sigma_2(\hat{\mu}_1) & \mu_2\sigma_2(\hat{\mu}_2) & \dots & \mu_p\,\sigma_2(\hat{\mu}_p) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_1\sigma_{p-1}(\hat{\mu}_1) & \mu_2\sigma_{p-1}(\hat{\mu}_2) & \dots & \mu_p\,\sigma_{p-1}(\hat{\mu}_p) \end{vmatrix}.$$

Лемма 69 позволяет переписать этот детерминант в эквивалентном виде:

$$\Delta(\mu) = \left(\prod_{i=1}^{p} \mu_i\right) \mathfrak{D}(\mu_p, \mu_{p-1}, \dots, \mu_1). \tag{3.46}$$

Поскольку $\Delta(\mu) \neq 0$, система (3.45) имеет единственное решение. Для его нахождения воспользуемся формулами Крамера. Ясно, что достаточно определить вид решения для одной какой-либо переменной, например, для x_1, потому что значения остальных переменных получаются простой перестановкой величин μ_i.

Итак, будем искать ответ для x_1. В соответствии с формулой Крамера, решение для x_1 дается отношением двух следующих определителей:

$$x_1 = \frac{1}{\Delta(\mu)} \begin{vmatrix} \sigma_1 & \mu_2 & \dots & \mu_p \\ 2_q q^{-1}\sigma_2 & \mu_2\sigma_1(\hat{\mu}_2) & \dots & \mu_p\,\sigma_1(\hat{\mu}_p) \\ 3_q q^{-2}\sigma_3 & \mu_2\sigma_2(\hat{\mu}_2) & \dots & \mu_p\,\sigma_2(\hat{\mu}_p) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_q q^{1-p}\sigma_p & \mu_2\sigma_{p-1}(\hat{\mu}_2) & \dots & \mu_p\,\sigma_{p-1}(\hat{\mu}_p) \end{vmatrix} \equiv \frac{\Delta_1(\mu)}{\Delta(\mu)}.$$

Займемся теперь тождественными преобразованиями числителя вышеприведенного отношения — определителя $\Delta_1(\mu)$.

Прежде всего, вычтем из первого столбца матрицы детерминанта $\Delta_1(\mu)$ сумму всех остальных столбцов. Пользуясь формулами (3.37) и (3.39), приведем элемент k-й строки первого столбца к виду:

$$k_q q^{1-k}\, \sigma_k - \sum_{i=2}^{p} \mu_i \sigma_{k-1}(\hat{\mu}_i) = z_k\, \sigma_k(\hat{\mu}_1) + z_{k-1}\, \mu_1 \sigma_{k-1}(\hat{\mu}_1) + q^{2(1-k)} \mu_1\, \sigma_{k-1}(\hat{\mu}_1), \tag{3.47}$$

где введено сокращенное обозначение $z_n = n_q q^{1-n} - n$ для упрощения записи выкладок. Таким образом, элементы первого столбца представлены в виде суммы нескольких слагаемых и в соответствии с этим определитель $\Delta_1(\mu)$ можно разложить в такую сумму определителей:

$$\Delta_1(\mu) = \Delta_1'(\mu) + \Delta_1''(\mu),$$

где k-й элемент первого столбца $\Delta_1'(\mu)$ равен $q^{2(1-k)}\mu_1\sigma_{k-1}(\hat{\mu}_1)$, а в k-й элемент первого столбца определителя $\Delta_1''(\mu)$ входит сумма $\eta_k(\mu)$ оставшихся членов правой части выразения (3.47)

$$\eta_k(\mu) \equiv z_k\,\sigma_k(\hat{\mu}_1) + z_{k-1}\,\mu_1\sigma_{k-1}(\hat{\mu}_1).$$

Сначала рассмотрим определитель

$$\Delta_1''(\mu) = \prod_{i=2}^{p}\mu_i \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \eta_2 & \sigma_1(\hat{\mu}_2) & \sigma_1(\hat{\mu}_3) & \dots & \sigma_1(\hat{\mu}_p) \\ \eta_3 & \sigma_2(\hat{\mu}_2) & \sigma_2(\hat{\mu}_3) & \dots & \sigma_2(\hat{\mu}_p) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \eta_p & \sigma_{p-1}(\hat{\mu}_2) & \sigma_{p-1}(\hat{\mu}_3) & \dots & \sigma_{p-1}(\hat{\mu}_p) \end{vmatrix}$$

и докажем, что он равен нулю: $\Delta_1''(\mu) = 0$.

Вычитая второй столбец последовательно из третьего, четвертого, и так далее, а также принимая во внимание соотношение (3.38), мы приходим к такому выражению

$$\Delta_1''(\mu) = \prod_{i=2}^{p}\mu_i \prod_{j=3}^{p}(\mu_2 - \mu_j) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \eta_2 & \sigma_1(\hat{\mu}_2) & 1 & \dots & 1 \\ \eta_3 & \sigma_2(\hat{\mu}_2) & \sigma_1(\hat{\mu}_2,\hat{\mu}_3) & \dots & \sigma_1(\hat{\mu}_2,\hat{\mu}_p) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \eta_p & \sigma_{p-1}(\hat{\mu}_2) & \sigma_{p-2}(\hat{\mu}_2,\hat{\mu}_3) & \dots & \sigma_{p-2}(\hat{\mu}_2,\hat{\mu}_p) \end{vmatrix}.$$

Теперь повторим эту процедуру, вычитая третий столбец из всех j-х стобцов с $j > 3$ и так далее. В результате получим следующее:

$$\Delta_1''(\mu) = N(\mu) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \eta_2 & \sigma_1(\hat{\mu}_2) & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \eta_3 & \sigma_2(\hat{\mu}_2) & \sigma_1(\hat{\mu}_2,\hat{\mu}_3) & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \eta_{p-1} & \sigma_{p-2}(\hat{\mu}_2) & \sigma_{p-3}(\hat{\mu}_2,\hat{\mu}_3) & \sigma_{p-4}(\hat{\mu}_2,\hat{\mu}_3,\hat{\mu}_4) & \dots & \sigma_1(\hat{\mu}_2,\dots) & 1 \\ \eta_p & \sigma_{p-1}(\hat{\mu}_2) & \sigma_{p-2}(\hat{\mu}_2,\hat{\mu}_3) & \sigma_{p-3}(\hat{\mu}_2,\hat{\mu}_3,\hat{\mu}_4) & \dots & \sigma_2(\hat{\mu}_2,\dots) & \mu_1 \end{vmatrix}$$

с нормировочным множителем

$$N(\mu) = \prod_{i=2}^{p} \mu_i \prod_{2 \le j < k \le p} (\mu_j - \mu_k).$$

Полученное выражение допускает дальнейшее упрощение. Вычтем из $(p-1)$-го столбца последний p-й столбец, предварительно умноженный на μ_p. Затем из $(p-2)$-го стобца вычтем последний стобец, предварительно умноженный на $\mu_{p-1}\mu_p$ и так далее. Потом повторим эту процедуру, стартуя с $(p-1)$-го столбца полученного определителя, пока не придем к окончательному выражению:

$$\Delta_1''(\mu) = N(\mu) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ z_2\sigma_2(\hat{\mu}_1) & \mu_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ z_3\sigma_3(\hat{\mu}_1) + z_2\sigma_2(\hat{\mu}_1)\mu_1 & 0 & \mu_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ z_4\sigma_4(\hat{\mu}_1) + z_3\sigma_3(\hat{\mu}_1)\mu_1 & 0 & 0 & \mu_1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_{p-1}\sigma_{p-1}(\hat{\mu}_1) + z_{p-2}\sigma_{p-2}(\hat{\mu}_1)\mu_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \mu_1 & 1 \\ z_{p-1}\mu_1\sigma_{p-1}(\hat{\mu}_1) & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mu_1 \end{vmatrix},$$

где мы восстановили явный вид η_k и учли, что $\sigma_p(\hat{\mu}_1) \equiv 0$.

Наконец, умножим третий столбец на $z_2\sigma_2(\hat{\mu}_1)$, четвертый на $z_3\sigma_3(\hat{\mu}_1)$ и т.п, а потом вычтем все эти стобцы из первого столбца. В результате получится определитель с нулевым первым стобцом, откуда следует, что $\Delta_1''(\mu) = 0$.

Преобразуем второй определитель

$$\Delta_1'(\mu) = \prod_{i=1}^{p} \mu_i \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ q^{-2}\sigma_1(\hat{\mu}_1) & \sigma_1(\hat{\mu}_2) & \sigma_1(\hat{\mu}_3) & \dots & \sigma_1(\hat{\mu}_p) \\ q^{-4}\sigma_2(\hat{\mu}_1) & \sigma_2(\hat{\mu}_2) & \sigma_2(\hat{\mu}_3) & \dots & \sigma_2(\hat{\mu}_p) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q^{2(1-p)}\sigma_{p-1}(\hat{\mu}_1) & \sigma_{p-1}(\hat{\mu}_2) & \sigma_{p-1}(\hat{\mu}_3) & \dots & \sigma_{p-1}(\hat{\mu}_p) \end{vmatrix}.$$

С помощью тождественных преобразований, аналогичных тем, что применялись к $\Delta_1''(\mu)$, данный определитель можно записать в следующей форме:

$$\Delta_1'(\mu) = \prod_{i=1}^{p} \mu_i \prod_{2 \le j < k \le p} (\mu_j - \mu_k) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ q^{-2}\sigma_1(\hat{\mu}_1) & \mu_1 & 1 & \dots & 0 \\ q^{-4}\sigma_2(\hat{\mu}_1) & 0 & \mu_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q^{2(1-p)}\sigma_{p-1}(\hat{\mu}_1) & 0 & 0 & \dots & \mu_1 \end{vmatrix}.$$

Введем новые параметры

$$\nu_1 = \mu_1, \quad \nu_i = q^{-2}\mu_i, \quad 2 \le i \le p.$$

Поскольку величина $\sigma_k(\hat{\mu}_1)$ является однородным полиномом k-го порядка от переменных μ_i, $i \ge 2$, то выполнено равенство

$$q^{-2k}\sigma_k(\hat{\mu}_1) = \sigma_k(\hat{\nu}_1).$$

Отсюда вытекает, что

$$\Delta_1' = \left(q^{2(p-1)}\prod_{i=1}^{p}\nu_i\right) q^{(p-1)(p-2)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \sigma_1(\hat{\nu}_1) & \sigma_1(\hat{\nu}_2) & \sigma_1(\hat{\nu}_3) & \dots & \sigma_1(\hat{\nu}_p) \\ \sigma_2(\hat{\nu}_1) & \sigma_2(\hat{\nu}_2) & \sigma_2(\hat{\nu}_3) & \dots & \sigma_2(\hat{\nu}_p) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{p-1}(\hat{\nu}_1) & \sigma_{p-1}(\hat{\nu}_2) & \sigma_{p-1}(\hat{\nu}_3) & \dots & \sigma_{p-1}(\hat{\nu}_p) \end{vmatrix}.$$

Применим к определителю этой формулы лемму 69, а затем вернемся от переменных $\{\nu_i\}$ назад к набору $\{\mu_i\}$. В результате придем к такому выражению:

$$\Delta_1(\mu) = \Delta_1'(\mu) = q^{(p-1)(p-2)}\left(\prod_{i=1}^{p}\mu_i\right)\mathfrak{D}(q^{-2}\mu_p, q^{-2}\mu_{p-1}, \dots, q^{-2}\mu_2, \mu_1).$$

Воспользуемся значением (3.46) определителя $\Delta(\mu)$ и получим окончательный ответ

$$x_1 = \frac{\Delta_1(\mu)}{\Delta(\mu)} = q^{(p-1)(p-2)}\frac{\mathfrak{D}(q^{-2}\mu_p, q^{-2}\mu_{p-1}, \dots, \mu_1)}{\mathfrak{D}(\mu_p, \mu_{p-1}, \dots, \mu_1)}$$

что очевидным образом эквивалентно (3.44). $\square$

Замечание 71 В работе [18] был предложен способ квантования простых (но не обязательно общего положения) орбит в $gl(n)^*$ и была предложена другая форма базисного тождества Ньютона. Опишем кратко процедуру квантования из [18] в наших терминах. Мы ограничимся только случаем R-матрицы, связанной с квантовой универсальной обертывающей алгебры $U_q(sl(m))$.

Рассмотрим орбиту $\mathcal{O}_M$ группы $GL(n)$, содержащую произвольную полупростую матрицу $M \in gl(n)^*$, спектр которой состоит из $r \le n$ попарно различных собственных значений μ_i с кратностями $m_i \ge 1$

$$m_1 + m_2 + \dots + m_r = n. \tag{3.48}$$

Обозначим $P(x) = \prod_{i=1}^{r}(x - \mu_i)$ — минимальный полином r-го порядка данной орбиты (каждое собственное значение μ_i является простым корнем этого полинома). Тогда плоской деформацией (квантованием) коммутативной алгебры $\mathbb{K}(\mathcal{O}_M)$ является фактор-алгебра модифицированной алгебры уравнения отражений по идеалу, порожденному элементами матрицы $P(L) = \prod_{i=1}^{r}(L - \mu_i \mathbf{I})$ и полиномами по генераторам следующего вида:

$$\mathrm{Tr}_R L^k - \bar{\beta}_k, \quad k = 1, \ldots, r-1 \tag{3.49}$$

с подходящим образом выбранными числами $\bar{\beta}_k$. Данный факт был установлен в работе [18], где коэффициенты $\bar{\beta}_k$ были выражены в терминах корней минимального полинома. Однако эти выражения можно существенно упростить, воспользовавшись параметрическим разрешением квантовых тождеств Ньютона, приведенным в формулах (3.42)–(3.43).

С этой целью свяжем с каждым корнем $\mu = \mu_i$ минимального полинома $P(x)$ последовательность (так называемую струну) чисел вида

$$\nu_1 = \mu, \quad \nu_2 = q^{-2}\nu_1 + q^{-1}\hbar, \;\; \nu_3 = q^{-2}\nu_2 + q^{-1}\hbar, \quad \ldots, \quad \nu_{m_i} = q^{-2}\nu_{m_i-1} + q^{-1}\hbar. \tag{3.50}$$

Рассмотрим набор всех чисел ν_{i_k}, принадлежащих струнам вида (3.50) и определим характер $\chi : Z(\mathcal{L}(q,\hbar)) \to \mathbb{K}$ центра с помощью формулы (3.19), в которой собственные значения пробегают все эти ν из упомянутого набора. Если перейти к фактор-алгебре модифицированной алгебры уравнения отражений по идеалу, порожденному этим характером (см. (3.16)), то он будет больше, чем квантовая орбита, получающаяся квантованием пучка скобок Пуассона на исходной орбите $\mathcal{O}_M$. Для получения настоящей квантовой орбиты $\mathcal{L}^{\chi}_{\hbar,q}$ необходимо взять дальнейший фактор по идеалу, порожденному матричными элементами матрицы $P(L)$, построенной по минимальному полиному орбиты $\mathcal{O}_M$. Полагая значения $|q-1|$ и $\hbar$ достаточно малыми, чтобы избежать случайного совпадения некоторых чисел ν из введенного выше объединения струн, мы получим n попарно различных собственных значений ν_{i_k} матрицы L, матричные элементы которой рассматриваются как элементы фактор-алгебры $\mathcal{L}^{\chi}_{\hbar,q}$.

В итоге получается 1-орбита общего положения $\mathcal{L}^{\chi}_{\hbar,q}$ и значения величин $\mathrm{Tr}_R L^k$ могут быть вычислены с помощью (3.42)-(3.43). При этом кратности d_i, отвечающие добавочным собственным значениям ν в струне (то есть тем, которые не являются корнями минимального полинома) оказываются равными нулю.

Итак, если дана некоммутативная 1-орбита общего положения $\mathcal{L}^{\chi}_{\hbar,q}$, то она является квантованием классической орбиты общего положения тогда и только тогда, когда набор собственных значений матрицы L, отвечающих этой некоммутативной орбите, не содержит струн вида (3.50). В противном случае, необходимо построить минимальный полином $P(x)$, выбирая первые элементы каждой струны в качестве его простых корней и рассмотреть двусторонний идеал в $\mathcal{L}^{\chi}_{\hbar,q}$, порожденный матричными элементами матрицы $P(L)$. Тогда дополнительный фактор от $\mathcal{L}^{\chi}_{\hbar,q}$ по этому идеалу даст квантование полупростой орбиты с кратными собственными значениями, равными первым элементам соответствующих струн, а сами кратности будут равны длинам (количеству элементов) в этих струнах.

4 Квантовые дифференциальные операторы

Данный раздел посвящен структуре дифференциального исчисления на квантовых многообразиях. Основной объект нашего интереса — так называемые твистованные дифференциальные алгебры $\mathcal{B}(\mathcal{L}(R), \mathcal{M})$. Каждая такая алгебра содержит в качестве подалгебры модифицированную алгебру уравнения отражений $\mathcal{L}(R)$, порождаемую матричными элементами матрицы $L = \|l_i^j\|$, которые удовлетворяют квадратично-линейным перестановочным соотношениям (2.33) (параметр $\hbar$ положен равным единице):

$$R_1 L_1 R_1 L_1 - L_1 R_1 L_1 R_1 = R_1 L_1 - L_1 R_1$$

Эта алгебра будет играть роль алгебры квантованных инвариантных векторных полей, действующих на некоммутативной алгебре функций $\mathcal{M}$. Данное действие должно задаваться так, чтобы сохранять алгебраическую структуру $\mathcal{M}$ и, одновременно, давать представление алгебры уравнения отражений $\mathcal{L}(R)$.

В качестве $\mathcal{M}$ могут выступать различные некоммутативные алгебры, например, алгебра координат квантовой плоскости или вторая копия алгебры уравнения отражений. Удобный способ построения такой алгебры заключается в выборе факторов свободных тензорных алгебр, порожденных объектами категории Шура-Вейля — категории конечномерных представлений алгебры уравнения отражений, структура которой рассматривалась в третьей главе диссертации. Более подробно это будет объяснено ниже, пока же заметим, что ключевым элементом всей конструкции является построение оператора перестановки (правило перемножения квантовых функций и векторных полей) вида:

$$\mathsf{R}: \quad \mathcal{L}(R) \otimes \mathcal{M} \to \mathcal{M} \otimes \mathcal{L}(R). \tag{4.1}$$

Наличие такой перестановки позволяет наделить пространство $\mathcal{L}(R) \otimes \mathcal{M}$ ассоциативным произведением. Результирующая ассоциативная алгебра и будет называться твистованной дифференциальной алгеброй $\mathcal{B}(\mathcal{L}(R), \mathcal{M})$.

Подчеркнем, что операция (4.1) задает аналог правила Лейбница для элементов алгебры $\mathcal{L}(R)$. Если определено действие этих элементов на генераторах алгебры $\mathcal{M}$, то посредством этого правила данное действие может быть распространено на мономы любой степени от генераторов $\mathcal{M}$. Если правило перестановки (4.1) выбрано надлежащим образом, мы получим представление алгебры уравнения отражений на всей алгебре квантовых функций $\mathcal{M}$.

Опишем подробнее различные типы квантовых алгебр $\mathcal{M}$, с которыми мы будем иметь дело. Во-первых, рассмотрим алгебры, порожденные базисными объектами V и V^* категории представлений алгебры $\mathcal{L}(R)$. Примером таких алгебр могут служить свободные тензорные алгебры $T(V)$ и $T(V^*)$, а также их фактор-алгебры: “R-симметрическая"и “R-антисимметрическая"алгебры пространства V или V^*, определенные соотношениями (2.1).

Во-вторый, в качестве $\mathcal{M}$ мы будем рассматривать квантовые матричные алгебры, порожденные совместимой парой R-матриц (см. первую главу). В качестве частного случая здесь содержится квантованная алгебра функций на группе $GL(m)$ — широко известная RTT алгебра. Отвечающая такому выбору $\mathcal{M}$ твистованная дифференциальная алгебра совпадает с Гейзенберговым дублем, разобранным в работе [49]. Если же в качестве $\mathcal{M}$ выбрать вторую копию алгебры уравнения отражений, мы получим еще один нетривиальный пример твистованной дифференциальной алгебры.

В большинстве случаев элементы алгебры уравниения отражений $\mathcal{L}(R)$ действуют на квантовой матричной алгебре $\mathcal{M}$ слева и представляют собой аналоги правоинвариантных векторных полей. Однако, если роль алгебры квантованных функций играет вторая копия алгебры уравнения отражений $\mathcal{M}(R)$, то можно определить и другое действие алгебры $\mathcal{L}(R)$ на $\mathcal{M}(R)$, а именно, аналог присоединенного действия одной копии алгебры Ли $gl(m)$ на другой. В результате мы получим два типа твистованной дифференциальной алгебры, составленной из $\mathcal{L}(R)$ и $\mathcal{M}(R)$. Одна из таких алгебр $\mathcal{B}_r(\mathcal{L}(R), \mathcal{M}(R))$ снабжена левым (правоинвариантным) действием векторных полей, а вторая — $\mathcal{B}_{ad}(\mathcal{L}(R), \mathcal{M}(R))$ — присоединенным действием. Оказывается, что алгебра $\mathcal{B}_{ad}(\mathcal{L}(R), \mathcal{M}(R))$ может быть вложена как подалгебра в надлежащим образом расширенную алгебру $\mathcal{B}_r(\mathcal{L}(R), \mathcal{M}(R))$. Как и в классической ситуации присоединенное действие алгебры $\mathcal{L}(R)$ на $\mathcal{M}(R)$ сохраняет ее центральные элементы. Пользуясь этим фактом, можно ограничить квантовые присоединенные векторные поля на квантовые орбиты в $\mathcal{M}(R)$, устройство которых разбиралось в предыдущей главе. На этом пути мы получим еще одно семейство твистованных дифференциальных алгебр, в которой роль квантовых функций играют функции на квантовых орбитах.

4.1 Струкрура твистованных дифференциальных алгебр и теория представлений алгебры уравнения отраженийй

В данном разделе мы рассмотрим примеры построения твистованных дифференциальных алгебр, в которых выбор алгебры квантованных функций $\mathcal{M}$ и правила их перестановки с элементами $\mathcal{L}(R)$ предписываются теорией представлений алгебры уравнения отражений и структурой категории Шура-Вейля. Такой подход имеет то очевидное преимущество, что он дает действие $\mathcal{L}(R)$ на $\mathcal{M}$, являющееся и представлением алгебры уравнения отражений, и комммутирующее с алгебраической структурой $\mathcal{M}$ (в силу эквивариантности теории представлений).

Как уже отмечалось выше, ключевым соотношением в определении структуры ассоциативной алгебры на $\mathcal{B}(\mathcal{L}(R), \mathcal{M})$ является соотношение перестановки элементов подалгебры $\mathcal{L}(R)$ и элементов подалгебры $\mathcal{M}$. Это соотношение приводит к аналогу классического правила Лейбница, поскольку в нем объединяются действие линейного дифференциального оператора на функцию и их взаимная перестановка. Ниже мы будем называть это соотношение правилом перестановки операторов и функций или, сокращенно, ОФП правилом.

Перечислим еще раз основные требования на ОФП правило. Во-первых, оно должно быть совместным с алгебраичесокой структурой обеих подалгебр $\mathcal{L}(R)$ и $\mathcal{M}$. Это означает, что подалгебра $\mathcal{M}$ является модулем над $\mathcal{L}(R)$ и действие алгебры уравнения отражений сохраняет умножение в алгебре $\mathcal{M}$. Во-вторых, ОФП правило должно быть совместно с возможной дополнительной симметрией подалгебр $\mathcal{L}(R)$ и $\mathcal{M}$. В качестве примера можно привести структуру коприсоединенного комодуля над алгеброй RTT, которой обладает алгебра уравнения отражений $\mathcal{L}(R)$. Алгебра квантованных функций $\mathcal{M}$ также может обладать структурой коприсоединенного или ковекторного комодуля над RTT алгеброй.

Оказывается, что эти естественные требования к ОФП правилу сильно ограничивают его возможный вид. А теория представлений алгебры уравнения отражений и структура категрии Шура-Вейля позволяет классифицировать все возможные види ОФП правила с точностью до умножения на константу.

Итак, рассмотрим некоторые примеры.

Пример 1. Пусть N-мерное векторное пространство V над полем $\mathbb{K}$ является левым модулем над $\mathcal{L}(R)$. Зафиксируем в V набор базисных векторов $\{x_i\}_{1\le i\le N}$, тогда действие генераторов модифицированной алгебры уравнения отражений имеет вид

$$L_1 R_1 \triangleright x_1 = \eta\, R_1^{-1} x_1, \quad \eta \in \mathbb{K} \setminus 0, \tag{4.2}$$

где символ $\triangleright$ означает действие линейного оператора. Для продолжения этого действия на тензорные степени пространства V воспользуемся явным видом оператора перестановки, диктуемого структурой категории Шура-Вейля (подробности см. в работе [36])

$$\mathsf{R}(L_{\underline{2}} \dot{\otimes} x_1) = x_1 \otimes L_2,$$

что, в свою очередь, с учетом (4.2) дает такое правило перестановки оператора, представляющего генераторы алгебры $\mathcal{L}(R)$ и базисные вектора x_i:

$$R_1(L_1 \triangleright) R_1 x_1 = \eta\, x_1 (L_2 \triangleright). \tag{4.3}$$

Эта формула заключает в себе действие l_i^j на пространстве V и категорный морфизм перестановки R, приведенный выше. Формула (4.3) открывает удобный путь для продолжения действия алгебры уравнения отражений на тензорные степени пространства V и является ключевым ингредиентом для нижеследующего определения ОФП правила.

Введем теперь алгебру квантованных функций. Рассмотрим ассоциативную $\mathbb{K}$-алгебру с единицей $\mathcal{X}(V)$, свободно порожденную элементами x_i:

$$\mathcal{X}(V) = \mathbb{K}\langle x_1, x_2, \ldots, x_N \rangle.$$

Эта алгебра играет роль $\mathcal{M}$ для следующей твистованной дифференциальой алгебры.

Определение 72 Пусть $\mathcal{X}(V) = \mathbb{K}\langle x_i \rangle_{1 \le i \le N}$ есть алгебра некоммутативных полиномов, свободно порожденная элементами x_i и пусть $\mathcal{L}(R)$ — модифицированная алгебра уравнения отражений, задаваемая R-матрицей $GL(m|n)$ типа. Тогда *свободная твистованная дифференциальная алгебра* $\mathcal{B}(\mathcal{L}(R), \mathcal{X}(V))$ есть ассоциативная алгебра с единицей, порожденная генераторами $\{x_i\}$ and $\{l_i^j\}$, которые удовлетворяют добавочному перестановочному соотношению (ОФП правило)

$$R_1 L_1 R_1 x_1 = \eta\, x_1 L_2, \qquad \eta \in \mathbb{K} \setminus 0. \tag{4.4}$$

Чтобы превратить подалгеру $\mathcal{X}(V) \subset \mathcal{B}(\mathcal{L}(R), \mathcal{X}(V))$ в модуль над алгеброй уравнения отражений достаточно задать действие генераторов L на единичном элементе $1_{\mathcal{B}}$. Поскольку такое действие должно реализовывать одномерное представление алгебры уравнения отражений, естественно потребовать:

$$L \triangleright 1_{\mathcal{B}} = \varepsilon(L)\, 1_{\mathcal{B}}, \tag{4.5}$$

где $\varepsilon(L_i^j)$ обозначает гомоморфизм коединицы в структуре биалгебры на $\mathcal{L}(R)$. Тогда ОФП правило (4.4) вместе с (4.5) позволяет получить действие матричных элементов L на любом однородном мономе от переменных x_i: для этого с помощью ОФП правила следует перенести элемент L в крайнюю правую позицию, а затем применить (4.5). Например, для мономов p-го порядка мы получаем:

$$\begin{aligned}
&(R_{p\to 1}L_1R_{1\to p}) \triangleright (x_1x_2\dots x_p) \equiv (R_{p\to 1}L_1R_{1\to p}\, x_1x_2\dots x_p) \triangleright 1_{\mathcal{B}} \\
&\qquad = \ (R_{p\to 2}(R_1L_1R_1x_1)R_{2\to p}\, x_2\dots x_p) \triangleright 1_{\mathcal{B}} = \eta x_1(R_{p\to 3}(R_2L_2R_2x_2)R_{3\to p}\, x_3\dots x_p) \triangleright 1_{\mathcal{B}} \\
&\qquad = \ \dots = \eta^p x_1x_2\dots x_p(L_{p+1} \triangleright 1_{\mathcal{B}}) = \eta^p x_1x_2\dots x_p\, I_{p+1}.
\end{aligned}$$

Очевидно, что свободная твистованная дифференциальная алгебрв $\mathcal{B}(\mathcal{L}(R), \mathcal{X}(V))$ содержит все $\mathcal{L}(R)$-модули V_λ, $\lambda \vdash p \geq 1$. Любой такой модуль является подпространством соответствующей однородной компоненты $\mathcal{X}^p(V)$:

$$V_\lambda \cong \mathrm{Im}\Big(\rho_R(e_\lambda^a)\Big) \subset \mathcal{X}^p(V), \quad \lambda \vdash p, \quad 1 \leq a \leq d_\lambda.$$

с кратностью d_λ.

Размер свободной твистованной дифференциальной алгебры можно сократить путем перехода к фактор-алгебре вида:

$$\mathcal{X}_J(V) = \mathcal{X}(V)/\langle J\rangle, \quad J \subset \mathcal{X}(V).$$

Напомним, что символ $\langle J\rangle$ обозначает двухсторонний идеал, порожденный подмножеством J. Предполагая, что идеал $\langle J\rangle$ инвариантен относительно действия алгебры $\mathcal{L}(R)$, мы можем определить ее действие на фактор-алгебре $\mathcal{X}_J(V)$.

Регулярный способ ввести набор соотношений на свободные генераторы x_i так, чтобы получившаяся алгебра $\mathcal{M}$ обладала всеми описанными выше желательными свойствами, сосотоит в выборе порождающего идеал подпространства J в виде образа центрального идемпотента $e_\lambda(\sigma) \in \mathcal{H}_p(q)$ для некоторого $p \geq 2$:

$$J_\lambda = \mathrm{Im}\Big(\rho_R(e_\lambda)\Big) \subset \mathcal{X}^p(V), \quad \lambda \vdash p.$$

Опираясь на свойства идемпотентов e_λ, можно показать, что при канонической проекции $\pi_\lambda : \mathcal{X}(V) \to \mathcal{X}_{J_\lambda}(V)$ все $\mathcal{L}(R)$-подмодули $V_\mu \in \mathcal{X}(V)$, отвечающие разбиениям $\mu \supset \lambda$, отображаются в нуль:

$$\pi_\lambda(V_\mu) = 0, \quad \forall \mu \supset \lambda.$$

Например, если мы хотим наложить *квадратичные* соотношения на генераторы x_i, то у нас будет всего две возможности: отправить в нуль q-антисимметричную компоненту квадратичных полиномов

$$J_{(1^2)} \subset \mathcal{X}^2(V): \qquad J_{(1^2)} = \mathrm{Im}\Big((q - R)\Big) \tag{4.6}$$

или q-симметричную компоненту

$$J_{(2)} \subset \mathcal{X}^2(V): \qquad J_{(2)} = \mathrm{Im}\Big((q^{-1} + R)\Big). \tag{4.7}$$

Выбор (4.6) приводит к твистованной дифференциальной алгебре $\mathcal{B}(\mathcal{L}(R), \mathcal{X}_s(V))$ над так называемой "квантовой плоскостью" $\mathcal{X}_s(V)$ [83]

$$\begin{aligned} &R_1 x_1 x_2 - q x_1 x_2 = 0\\ &R_1 L_1 R_1 L_1 - L_1 R_1 L_1 R_1 = 0\\ &R_1 L_1 R_1 x_1 = \eta\, x_1 L_2. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Действие $\mathcal{L}(R) \triangleright \mathcal{X}_s(V)$ индуцируется соотношением (4.5) вместе с третьей сторокой в системе (4.8). Дифференциальная алгебра (4.8) содержит только такие $\mathcal{L}(R)$-модули, которые изоморфны $V_{(p)}$ для некоторого натурального p, где символ (p) обозначает разбиение числа p, соответствующее однострочной диаграмме Юнга.

Твистованная дифференциальня алгебра $\mathcal{B}(\mathcal{L}(R), \mathcal{X}_s(V))$ ковариантна относительно левого кодействия биалгебры RTT:

$$\delta_\ell(L_i^j) = \sum_{k,p=1}^{N} T_i^k S(T_p^j) \otimes L_k^p, \qquad \delta_\ell(x_i) = \sum_{k=1}^{N} T_i^k \otimes x_k,$$

где S означает отображение антипода в RTT. В практических вычислениях удобно выбрать условные обозначения $\delta_\ell(L_1) = T_1 L_1 S(T_1)$ и $\delta_\ell(x_1) = T_1 x_1$ и считать, что генераторы T_a коммутируют с L_b и x_c в случае, когда $a \neq b$ и $a \neq c$.

Ковариантность ОФП правила в системе соотошений (4.8) легко проверяется прямым расчетом:

$$\begin{aligned} \delta_\ell(R_1 L_1 R_1 x_1) &= R_1 T_1 L_1 \underline{S(T_1) R_1 T_1} x_1 = R_1 T_1 L_1 T_2 R_1 S(T_2) x_1 = \underline{R_1 T_1 T_2} L_1 R_1 x_1 S(T_2)\\ &= T_1 T_2 \underline{R_1 L_1 R_1 x_1} S(T_2) = \eta\, T_1 x_1 T_2 L_2 S(T_2) = \delta_\ell(\eta\, x_1 L_2). \end{aligned}$$

Предположим, что R-матрица $GL(m)$ типа, задающая соотношения в алгебре уравнения отражений, является деформацией обычной перестановки: $R \to P$ при $q \to 1$. В этом случае $m = N = \dim_{\mathbb{K}} V$. Рассмотрим квазиклассический предел

$q \to 1$ твистованной дифференциальной алгебры $\mathcal{B}(\mathcal{L}(R), \mathcal{X}_s(V))$, заданной соотношениями (4.8). С этой целью перейдем к другому набору генераторов алгебры уравнения отражений:

$$L = I - (q - q^{-1})K, \qquad K = \|K_i^j\|. \tag{4.9}$$

С учетом условия Гекке на R-матрицу, перестановочные соотношения в алгебре уравнения отражений в терминах новых генераторов примут следующий вид:

$$R_1K_1R_1K_1 - K_1R_1K_1R_1 = R_1K_1 - K_1R_1. \tag{4.10}$$

Структура биалгебры на генераторах K несколько сложнее, чем на генераторах L:

$$\Delta(K) = 1 \otimes K + K \otimes 1 - (q - q^{-1})K \otimes K, \qquad \varepsilon(K) = 0. \tag{4.11}$$

Теперь, согласно первой строке соотношений (4.8), квазиклассический предел подалгебры $\mathcal{X}_s(V)$, генерируемой элементами x_i, есть обычная коммутативная координатная алгебра пространства V^*

$$x_2x_1 - x_1x_2 = 0. \tag{4.12}$$

Итак, в пределе $q \to 1$ мы получаем равенство $\mathcal{X}_s(V) = \mathbb{K}[V^*]$.

Правила умножения (4.10) переходят в определяющие соотношения универсальной обертывающей алгебры $U(gl(m))$

$$\kappa_1\kappa_2 - \kappa_2\kappa_1 = \kappa_1P_{12} - P_{12}\kappa_1, \tag{4.13}$$

где матрица $\kappa = \|\kappa_i^j\|$ есть предел матрицы генераторов K при $q \to 1$.

Чтобы получить предельную форму действия алгебры уравнения отражений (третье соотношение в (4.8)), дополнительно предположим, что параметр η имеет следующее поведение в квазиклассическом пределе: $\eta = 1 - (q - q^{-1})\eta_0 + o(q^2 - 1)$. После этого ОФП правило преобразутся к виду:

$$\kappa_2x_1 - x_1\kappa_2 = \eta_0x_1 + P_{12}x_1. \tag{4.14}$$

Учитывая также коммутационные соотношения (4.13), мы можем интерпретировать генераторы κ_i^j как векторные поля на алгебре функций $\mathbb{K}[V^*]$:

$$\kappa_i^j = x_i\partial_x^j + \eta_0\delta_i^j\,(x \cdot \partial_x), \tag{4.15}$$

где введены обозначения

$$\partial_x^k = \frac{\partial}{\partial x_k}, \qquad (x\cdot\partial_x) = \sum_{k=1}^{m} x_k \partial_x^k .$$

Если в пространстве V задано левое фундаментальное векторное представление группы $GL(m)$

$$x_i \mapsto x_j M_i^j, \quad M = \|M_i^j\| \in GL(m)$$

то поля κ_i^j в формуле (4.15) инвариантны относительно правого действия группы $GL(m)$.

Пример 2. Начнем теперь с более интересного “присоединенного” модуля $W(M) = V\otimes V^*$. Зафиксируем в $W(M)$ линейный базис $M_i^j = x_i \otimes y^j$. Определим вначале морфизм перестановки пространств $W(L)$ и $W(M)$. Для пространства V перестановка с $W(L)$ была приведена выше в Примере 1, а для пространства V^* этот морфизм имеет вид [36]:

$$\mathsf{R}_{(W(L),V^*)}(L_2 \otimes y_1) = y_1 \dot{\otimes} L_{\underline{2}}. \tag{4.16}$$

Напомним, что $L_{\underline{2}} = R_{12}^{-1} L_1 R_{12}$. Представление алгебры уравнения отражений в дуальном пространстве V^* задается действием генераторов алгебры на базисных векторах y^i

$$L_i^j \triangleright y^k = \tilde{\eta} \sum_{s=1}^{N} y^s (R^2)_{si}^{kj}$$

или, в компактных матричных обозначениях

$$L_2 \triangleright y_1 = \tilde{\eta}\, y_1 R_{12}^2, \tag{4.17}$$

где $\tilde{\eta}$ — ненулевой числовой параметр.

Категорный морфизм перестановки (4.16) и действие (4.17) приводят к следующему ОФП правилу (аналогичному правилу (4.3))

$$(L_2 \triangleright) y_1 = \tilde{\eta}\, y_1 R_1 (L_1 \triangleright) R_1. \tag{4.18}$$

Теперь легко написать перестановку элементов пространств $W(L)$ и $W(M)$, а также действие генераторов L на M. Морфизм перестановки L и M получается комбинированием сответствующих перестановок L с x и y:

$$\mathsf{R}_{(W(L),W(M))}(L_1 \dot{\otimes} M_{\overline{2}}) = M_{\overline{2}} \dot{\otimes} L_1. \tag{4.19}$$

Действие алгебры уравнения отражений на этом пространстве дается формулой:

$$L_1 \triangleright M_{\overline{2}} = \eta\,\tilde{\eta}\,M_{\underline{2}}. \tag{4.20}$$

Присоединенное действие (4.20) вместе с вышеприведенным правилом перестановки позволяет получить требуемое ОФП правило для операторов $L\triangleright$ и базисных векторов M в пространстве представления $W(M)$:

$$(L_1\triangleright)M_{\overline{2}} = \eta\,\tilde{\eta}\,M_{\underline{2}}\,(L_1\triangleright). \tag{4.21}$$

Формула (4.21) позволяет распространить действие генераторов алгебры уравнения отражений на тензорные степени $(V\otimes V^*)^{\otimes n}$ присоединенного модуля.

По той же схеме, что и в Примере 1, рассмотрим ассоциативную алгебру с единицей $\mathcal{B}(\mathcal{L}(R),\mathcal{M})$, содержащую в качестве подалгебры алгебру уравнения отражений $\mathcal{L}(R)$ и ассоциативную алгебру $\mathcal{M}$, свободно порожденную генераторами M_i^j. Перестановочные соотношения между генераторами этих подалгебр постулируются в виде:

$$L_1 M_{\overline{2}} = M_{\underline{2}} L_1. \tag{4.22}$$

Эта формула проистекает из соотношений (4.21), которые, в свою очередь, диктуются теорией представлений алгебры уравнения отражений. Выполнение подобных соотношений приводит к сохранению алгебраической структуры подалгебры $\mathcal{M}$ под действием алгебры уравнения отражений, а также обеспечивает эквивариантность получающихся представлений. Действие алгебры уравенения отражений $\mathcal{L}(R)$ на подалгебре $\mathcal{M}$ задается комбинированием ОФП правила (4.22) и соотношения (4.5). Отметим, что соотношение (4.5) налагает связь на произвольные константы η и $\tilde{\eta}$: $\eta\,\tilde{\eta} = 1$.

Размеры алгебры $\mathcal{B}(\mathcal{L}(R),\mathcal{M})$ можно уменьшить, налагая соотношения на генераторы M_i^j, которые должны быть совместны с ОФП правилом (4.22). Рассмотрим случай квадратичных соотношений. В работе [32] была построена пара ортогональных проекторов $\mathcal{A}_q, \mathcal{S}_q : \mathcal{M}^{(2)} \to \mathcal{M}^{(2)}$. Подпространство $\mathcal{M}^{(2)} \subset \mathcal{M}$ порождено квадратичными мономами по генераторам M_i^j. Проекторы $\mathcal{A}_q$ и $\mathcal{S}_q$ допускают естественную интерпретацию как q-антисимметризатора и q-симметризатора в пространстве $\mathcal{M}^{(2)}$. Образы действия этих операторов — инвариантные подпространства относительно действия алгебры уравнения отражений. Таким образом, согласованные квадратичные соотношения на генераторы свободной алгебры M_i^j могут быть выбраны в виде $\operatorname{Im}\mathcal{A}_q = 0$ или $\operatorname{Im}\mathcal{S}_q = 0$.

Рассмотрим первый случай. Можно показать, что условие $\operatorname{Im}\mathcal{A}_q = 0$ эквивалентно наложению на генераторы M_i^j перестановочных соотношений алгебры уравнения отражений. Таким образом мы приходим к твистованной дифференциальной алгере следующего вида:

$$\begin{aligned} &R_1M_1R_1M_1 - M_1R_1M_1R_1 = 0\\ &R_1L_1R_1L_1 - L_1R_1L_1R_1 = 0\\ &R_1L_1R_1M_1 = M_1R_1L_1R_1. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Мы будем обозначать эту дифференциальную алгебру символом $\mathcal{B}_{\mathrm{ad}}(\mathcal{L}(R), \mathcal{M}(R))$. Подалгебра $\mathcal{M}(R)$ наделена структурой $\mathcal{L}(R)$-модуля посредством действия подалгебры $\mathcal{L}(R)$, заданного формулой (4.5) и третьим соотношением вышеприведенной системы. Кроме того, алгебра $\mathcal{B}_{\mathrm{ad}}(\mathcal{L}(R), \mathcal{M}(R))$ является левым коприсоединенным комодулем над алгеброй RTT.

Важным свойством рассматриваемой дифференциальной алгебры является тот факт, что R-следы $\operatorname{Tr}_R M^k$, $k \geq 0$, являются центальными во всей $\mathcal{B}_{\mathrm{ad}}(\mathcal{L}(R), \mathcal{M}(R))$, а не только в подалгебре $\mathcal{M}(R)$. Следовательно, эти следы инвариантны относительно действия алгебры уравнения отражений $\mathcal{L}(R)$, а значит действие алгебры уравнения отражений может быть ограничено на факторы алгебры $\mathcal{M}(R)$ по идеалам, порожденным соотношениями вида $\operatorname{Tr}_R M^k = c_k$, $1 \leq k \leq m$, где величины c_k представляют собой фиксиарованные константы. В предыдущем разделе такие фактор-алгебры интерпретировались как квантованные алгебры функций на орбитах коприсоединенного действия группы $GL(m)$ в $gl^*(m)$. Таким образом, подалгебра $\mathcal{L}(R)$ с действием, ограниченным на некоторую орбиту, может рассматриваться как квантованная алгебра дифференциальных операторов, порожденных векторными полями, касательными к данной орбите.

Для иллюстрации разумности такой интерпретации рассмотрим классический предел $q \to 1$ твистованной дифференциальной алгебры (4.23) в случае, когда R-матрица, задающая перестановочные соотношения ее генераторов, является деформацией перестановки P.

Выполняя сдвиг (4.9) генераторов алгебры уравнения отражений и переходя к пределу $q \to 1$ в дифференциальной алгебре (4.23), мы приходим к следующим соотношениям (здесь $m_i^j = \lim_{q\to 1} M_i^j$ и $\kappa_i^j = \lim_{q\to 1} K_i^j$):

$$\begin{aligned} &m_1m_2 - m_2m_1 = 0\\ &\kappa_1\kappa_2 - \kappa_2\kappa_1 = \kappa_1P_{12} - P_{12}\kappa_1\\ &\kappa_2m_1 - m_1\kappa_2 = P_{12}m_1 - m_1P_{12}. \end{aligned}$$

Две последние строки этих перестановочных соотношений указывают, что величины κ_i^j являются косоприсоединенными векторными полями на пространстве гладких функций на $gl^*(m)$:

$$\kappa_i^j = m_i^s \frac{\partial}{\partial m_j^s} - m_s^j \frac{\partial}{\partial m_s^i}, \tag{4.24}$$

где как обычно подразумевается суммирование по индексу s. Как хорошо известно, векторные поля (4.24) касательны к орбитам группы $GL(m)$ в линейном пространстве $gl^*(m)$.

4.2 Некоммутативные векторные поля, частные производные и инвариантные дифференциальные операторы

В данном разделе будет определена твистованная дифференциальная алгбра над произвольной квантовой матричной алгеброй $\mathcal{M}(R, F)$. Кроме того мы введем понятие некоммутативных частных производных по "координатам" в пространстве квантованных функций.

Прежде всего, необходимо задать ОФП правило для генераторов подалгебр $\mathcal{L}(R)$ и $\mathcal{M}(R, F)$, аналогичное третьему соотношению в системе (4.8). Дадим соответствующее определение.

Определение 73 Пусть $\mathcal{L}(R)$ является алгеброй уравнения отражений, заданную R-матрицей $GL(m)$-типа R, а $\mathcal{M}(R, F)$ представляет собой квантовую матричную алгебру, связанную с парой совместимых R-матриц $\{R, F\}$ (см. Приложение A). Определим ассоциативную алгебру с единицей $\mathcal{B}_r(\mathcal{L}(R), \mathcal{M})$ над полем $\mathbb{K}$, порожденную элементами L_i^j алгебры уравнения отражений и элементами M_i^j квантовой матричной алгебры, которые удовлетворяют системе перестановочных соотношений следующего вида:

$$\begin{aligned} &R_1 M_1 M_{\overline{2}} - M_1 M_{\overline{2}} R_1 = 0 \\ &R_1 L_1 R_1 L_1 - L_1 R_1 L_1 R_1 = 0 \\ &R_1 L_1 R_1 M_1 = \eta M_1 L_{\overline{2}}, \end{aligned} \tag{4.25}$$

где "матричные копии" $M_{\overline{2}}$ и $L_{\overline{2}}$ порождаются R-матрицей F в соответствии правилом:

$$L_{\overline{2}} = F_1 L_1 F_1^{-1}, \qquad M_{\overline{2}} = F_1 M_1 F_1^{-1}.$$

Ненулевой числовой коэффициент η является параметром алгебры.

Введем действие генераторов алгебры уравнения отражений на единичный элемент $1_{\mathcal{B}}$ алгебры $\mathcal{B}_r(\mathcal{L}(R), \mathcal{M})$

$$a \triangleright 1_{\mathcal{B}} = \varepsilon(a) 1_{\mathcal{B}}, \quad \forall a \in \mathcal{L}(R), \tag{4.26}$$

где отображение ε представляет собой коединицу в алгебре уравнения отражений $\mathcal{L}(R)$: $\varepsilon(L_i^j) = \delta_i^j$ (см. (2.56)). Пользуясь третьим соотношением в системе (4.25), действие подалгебры $\mathcal{L}(R)$ можно распространить на всю подалгебру $\mathcal{M}(R, F)$. Введенную таким образом алгебру $\mathcal{B}_r(\mathcal{L}(R), \mathcal{M})$ будет называть твистованной дифференциальной алгеброй на квантовой матричной алгебре $\mathcal{M}(R, F)$.

Отметим, что Гейзенбергов дубль, рассмотренный в работе [49], отвечает паре согласованных R-матриц вида $\{R, P\}$, где R есть R-матрица $GL(m)$-типа. В данном случае квантиовая матричная алгебра $\mathcal{M}(R, P)$ превращается в алгебру Хопфа квантованных функций на группе $GL(m)$.

Дадим краткое пояснение из каких соображений выбирается ОФП правило (4.25) в приведенном выше определении твистованной дифференциальной алгебры. Как отмечалось в разделе 2.2, генераторы алгебры уравнения отражений являются элементами пространства $V \otimes V^*$, входящего в класс объектов категрии Шура-Вейля SW(V): $L_i^j = x_i \otimes y^j$, где $\{x_i\}_{1 \le i \le N}$ и $\{y^j\}_{1 \le j \le N}$ являются, соответственно, базисными векторами в пространствах V и V^*. Для того, чтобы получить действие алгебры уравнения отражений на генераторах M_i^j, которое не было бы присоединенным действием (как в (4.23)), а было бы односторонним, аналогичным действию (4.8), поступим следующим образом.

Расширим класс объектов категории SW(V), введя дополнительную пару взаимно дуальных N-мерных векторных пространств

$$U = \mathrm{span}_{\mathbb{K}}(t_i)_{1 \le i \le N}, \qquad U^* = \mathrm{span}_{\mathbb{K}}(z^i)_{1 \le i \le N}.$$

Матричные элементы M_i^j будут отождествляться с базисными элементами тензорного произведения $V \otimes U^*$: $M_i^j = x_i \otimes z^j$. Для получения перестановки (ОФП правила) между L_i^j и M_r^s мы должны учесть уже известную перестановку генераторов L и x, а затем воспользоваться категорным морфизмом перестановки для $L \in V \otimes V^*$ и U^*.

Морфизм перестановки $\mathsf{F} : V \otimes U^* \to U^* \otimes V$ задается оператором F:

$$\mathsf{F}(x_i \otimes z^j) = z^k \otimes x_s F_{ki}^{sj}.$$

Именно этот оператор является второй R-матрицей в определении согласованной пары и входит в определение матричных копий $L_{\overline{2}}$.

Кроме того, имеется и другой выбор генераторов "алгебры функций". А именно, мы могли бы взять в качестве координат в пространстве квантованных функций такие элементы: $M_i^j = t_i \otimes y^j \in U \otimes V^*$. Подобный выбор приводит к другому виду ОФП правила по сравнению с (4.25)

$$L_{\overline{2}} M_1 = \tilde{\eta}\, M_1 R_1 L_1 R_1. \tag{4.27}$$

Мы могли бы получить соотвествующую твистованную дифференциальную алгебру начав с (4.25). Если ввести матрицу $\hat{L} = M^{-1} L M$ и новую R-матрицу $\hat{R} = F^{-1} R^{-1} F$, то система соотношений (4.25) приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned} &\hat{R}_1 M_{\underline{2}} M_{\underline{1}} - M_{\underline{2}} M_{\underline{1}} \hat{R}_1 = 0 \\ &\hat{R}_1 \hat{L}_1 \hat{R}_1 \hat{L}_1 - \hat{L}_1 \hat{R}_1 \hat{L}_1 \hat{R}_1 = 0 \\ &\hat{L}_{\underline{2}} M_1 = \eta M_1 \hat{R}_1 \hat{L}_1 \hat{R}_1, \end{aligned}$$

где $M_{\underline{2}} = F^{-1} M_1 F$. ОФП правило, выражаемое третьей строкой этой системы, совпадает с (4.27) (с точностью до несущественной замены $F \to F^{-1}$).

С точки зрения теории представлений алгебры уравниения отражений, подалгебра $\mathcal{M}(R, F)$, входящая в определение 73 твистованной дифференциальной алгебры, представляет собой прямую сумму модулей, изоморфных модулям в дифференциальной алгебре (4.8). Более точно это сформулировано в следующем утверждении.

Утверждение 74 *Соотношение (4.26) позволяет ввести в подалгебре $\mathcal{M}(R, F) \subset \mathcal{B}_r(\mathcal{L}(R), \mathcal{M})$ структуру $\mathcal{L}(R)$ модуля. Действие генераторов L_i^j на базисных векторах однородной компоненты p-й степени $\mathcal{M}^p(R, F)$ выглядит следующим образом:*

$$L_1 \triangleright R_{(1\to p)} M_{\overline{1}} M_{\overline{2}} \ldots M_{\overline{p}} = \eta^p R^{-1}_{(1\to p)} M_{\overline{1}} M_{\overline{2}} \ldots M_{\overline{p}}, \tag{4.28}$$

где $M_{\overline{k}} = F_{k-1} M_{\overline{k-1}} F^{-1}_{k-1}$.

Доказательство. Доказательство проводится прямым вычислением. Прежде всего, пользуясь условием совместности (A.34) преобразуем соотношение (4.25) к виду:

$$R_k L_{\overline{k}} R_k M_{\overline{k}} = \eta\, M_{\overline{k}} L_{\overline{k+1}}, \quad \forall k \geq 1.$$

После этого имеем:

$$L_1 \triangleright (R_{(1\to p)} M_{\overline{1}} \dots M_{\overline{p}}) = \eta^p \, R^{-1}_{(1\to p)} M_{\overline{1}} \dots M_{\overline{p}} (L_{\overline{p+1}} \triangleright 1_{\mathcal{B}}).$$

Поскольку $L_{\overline{p+1}} \triangleright 1_{\mathcal{B}} = \varepsilon(L_{\overline{p+1}}) 1_{\mathcal{B}} = I_{12\dots p+1} 1_{\mathcal{B}}$, то мы приходим к желаемому результату (4.28).

Аналогичным образом можно доказать, что действие алгебры $\mathcal{L}(R)$ сохраняет алгебраическую структуру квантовой матричной алгебры $\mathcal{M}(R,F)$, то есть

$$a \triangleright (R_k M_{\overline{k}} M_{\overline{k+1}} - M_{\overline{k}} M_{\overline{k+1}} R_k) = 0, \quad \forall a \in \mathcal{L}(R),\ \forall\, k \ge 1. \qquad \square$$

Рассмотрим подробнее случай твистованной дифференциальной алгебры над алгеброй уравнения отражений, то есть, положим $F = R$. Заметим, что при этом мы не получим алгебру (4.23), поскольку ОФП правило (4.25) примет следующую форму:

$$R_1 L_1 R_1 M_1 = \eta M_1 R_1 L_1 R_1^{-1}, \tag{4.29}$$

что отличается от третьего соотношения в твистованной дифференциальной алгебре (4.23) степенью матрицы R, стоящей на последнем месте. Такое изменение приводит к важному следствию: следы матрицы генераторов алгебры квантовых функций $\mathrm{Tr}_R(M^k)$ не являются центральными элементами всей алгебры (4.29) и действине твистованных дифференциальных операторов из подалегбры $\mathcal{L}(R)$ более не сохраняет квантовых орбит, которые представляются фактор-алгебрами алгебры $\mathcal{M}(R)$ по идеалам, порожденным соотношениями на эти следы.

Этот факт не удивителен, так как в классическом пределе $q \to 1$ соотношение (4.29) определяет правоинвариантные векторные поля на $gl^*(m)$:

$$L = I - (q - q^{-1})K, \qquad K_i^j \ \xrightarrow{q\to 1}\ m_i^a \frac{\partial}{\partial m_j^a}.$$

Здесь мы пренебрегли возможными добавками центрального слагаемого, пропорционального η_0 (см. формулу (4.15)).

Твистованная дифференциальная алгебра (4.23), содержащая квантовые дифференциальные операторы, полученные из присоединенных векторных полей, может быть выделена как подалгебра в $\mathcal{B}_r(\mathcal{L}(R), \mathcal{M}(R))$ с ОФП правилом (4.29). Более точно, мы должны расширить эту алгебру элементами L^{-1} и M^{-1}. Учитывая тождества Гамильтона-Кэли на матрицы L и M, для этого требуется только обратить центральный элемент, стоящий при единичной матрице в этом тождестве — так называемый квантовый детерминант соотвественно матрицы L и M.

Итак, введем матрицы

$$Q = LM^{-1}L^{-1}M, \qquad N = M^{-1}Q. \tag{4.30}$$

На этом этапе мы дожны дополнительно потребовать обратимости центральных элементов $a_m(L)$ and $a_m(M)$, как было объяснено выше. Следующее утверждение является прямым следствием ОФП правила (4.29).

Утверждение 75 *Матричные элементы матриц Q и M удовлетворяют следующим перестановочным соотношениям:*

$$\begin{aligned}
&R_1M_1R_1M_1 - M_1R_1M_1R_1 = 0\\
&R_1Q_1R_1Q_1 - Q_1R_1Q_1R_1 = 0\\
&R_1Q_1R_1M_1 - M_1R_1Q_1R_1 = 0.
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Для пары M и N имеем соответственно:

$$\begin{aligned}
&R_1M_1R_1M_1 - M_1R_1M_1R_1 = 0\\
&R_1N_1R_1N_1 - N_1R_1N_1R_1 = 0\\
&R_1^{-1}N_1R_1M_1 - M_1R_1^{-1}N_1R_1 = 0.
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Из утверждения 75 ясно, что матричные элементы матриц Q и M порождают подалгебру в твистованной дифференциальной алгебре $\mathcal{B}_r(\mathcal{L}, \mathcal{M})$ (4.25). Кроме того, можно вычислить действие генераторов Q_i^j на единичный элемент $1_{\mathcal{B}}$ и превратить эту подалгеру в новую твистованную дифференциальную алгебру.

Утверждение 76 *Если действие генераторов L задается соотношением (4.5), то матричные элементы матрицы Q, определенной в (4.30), действуют на единицу алгебры следующим образом:*

$$Q_i^j \triangleright 1_{\mathcal{B}} = \xi\, \delta_i^j 1_{\mathcal{B}}, \qquad \xi = \eta^{-1}q^{2m}. \tag{4.33}$$

Очевидно, что твистованная дифференциальная алгебра, порождаемая элементами Q и M, удовлетворяющими (4.31) и (4.33), совпадает (с точностью до параметра общей нормировки ξ) с присоединенной дифференциальной алгеброй $\mathcal{B}_{\mathrm{ad}}(\mathcal{L}(R), \mathcal{M}(R))$, определенной в 4.23. Подчеркнем, что ОФП правило в присоединенной дифференциальной алгебре не зависит от параметра η, входящего в соотношения (4.25). Этот параметр возникает только в формуле действия присоединенных генераторов Q_i^j на единичный элемент (4.33).

Определим теперь структуру присоединенного действия на однородных компонентах пространства функций.

Утверждение 77 *В присоединенной твистованной дифференциальной алгебре $\mathcal{B}_{\rm ad}(\mathcal{Q},\mathcal{M})$, заданной соотношениями (4.31) и (4.33), подалгебра $\mathcal{M}(R)$, порожденная элементами M_i^j, обладает структурой $\mathcal{Q}(R)$-модуля со следующим действием базисных элементов подалгебры $\mathcal{Q}(R)$ на базисные элементы однородной компоненты p-го порядка $\mathcal{M}^p(R)$*

$$(Q_1 Q_{\overline{2}}\dots Q_{\overline{k}})\triangleright(M_{\overline{k+1}}M_{\overline{k+2}}\dots M_{\overline{k+p}}) = \xi^k(M_{\underline{k+1}}M_{\underline{k+2}}\dots M_{\underline{k+p}}),\quad \forall k,p\ge 1. \quad (4.34)$$

Напомним, что в вышеприведенной формуле матричные копии определяются через матрицу R:

$$M_{\overline{k}} = R_{k-1}M_{\overline{k-1}}R_{k-1}^{-1},\quad M_{\underline{k}} = R_{k-1}^{-1}M_{\underline{k-1}}R_{k-1}.$$

Теперь, предполагая дополнительно, что матрица R является деформацией перестановки P, построим ограничение присоединенной дифференциальной алгебры на квантованные $GL(m)$ орбиты. Как уже неоднократно упоминалось, квантовые алгебры функций на таких орбитах представляются фактор-алгебрами алгебры уравнения отражений по идеалам $J_{\{c\}}$, порожденным элементами

$$\mathrm{Tr}_R(M^k) - c_k,\qquad 1\le k\le m. \quad (4.35)$$

Система соотношений (4.32) позволяет убедиться, что элементы $\mathrm{Tr}_R(M^k)$ и $\mathrm{Tr}_R(N^k)$ центральны в присоединенной дифференциальной алгебре. Этот факт есть прямое следствие свойства квантового следа:

$$\mathrm{Tr}_{R^{(2)}}(R_1^{\pm1}X_1R_1^{\mp1}) = \mathrm{Tr}_R(X)\,I_1,$$

справедливого для произвольной $N\times N$ матрицы X.

Таким образом, квантованные алгебры функций на орбитах $GL(m)$ инвариантны относительно присоединенного действия генераторов алгебры уравнения отражений. Ограничив присоединенную дифференциальную алгебру $\mathcal{B}_{\rm ad}(\mathcal{Q},\mathcal{M})$ на орбиту $\mathcal{M}(R)/J_{\{c\}}$, мы придем к нетривиальным соотношениям на дифференциальные операторы. Эти соотношения получаются фиксацией другого набора центральных элементов, а именно, элементов $\mathrm{Tr}_R(N^k) = \mathrm{Tr}_R((M^{-1}Q)^k)$. Легко проверить справедливость следующего утверждения.

Утверждение 78 *Ограничение дифференциальной алгебры $\mathcal{B}_{\mathrm{ad}}(\mathcal{Q},\mathcal{M})$, заданной соотношениями (4.31), на квантовую орбиту $\mathcal{M}(R)/J_{\{c\}}$, где идеал $J_{\{c\}}$ порождается элементами (4.35), представляет собой фактор алгебру исходной алгебры $\mathcal{B}_{\mathrm{ad}}(\mathcal{Q},\mathcal{M})$ по двустороннему идеалу, порожденному соотношениями*

$$\mathrm{Tr}_R(M^k) = c_k, \qquad \mathrm{Tr}_R((M^{-1}Q)^k) = \mathrm{Tr}_R((M^{-1}Q\triangleright)^k)1_{\mathcal{B}}|_{J_{\{c\}}}, \quad 1 \le k \le m, \quad (4.36)$$

где в последнем равенстве предполагается, что следы матрицы M должны быть специализированы в константы c_i после вычисления действвия генераторов Q.

Замечание 79 Ограничение $1 \le k \le m$ в условии Утверждения 78 проистекает из того факта, что для R-матрицы $GL(m)$-типа квантовые матрицы M и $M^{-1}Q$ удовлетворяют тождеству Гамильтона -Кэли с полиномом порядка m. Поэтому все следы $\mathrm{Tr}_R(M^p)$ и $\mathrm{Tr}_R((M^{-1}Q)^p)$ степени $p > m$ выражаются в терминах первых m следов.

Заметим также, что ограничение центральных элементов $\mathrm{Tr}_R((M^{-1}Q)^k)$, задаваемое условием (4.36), совместно с операторным действием генераторов Q, представленным соотношениями (4.34). А именно, можно показать, что $\mathrm{Tr}_R((M^{-1}Q\triangleright)^k)$ является скалярным оператором на любой однородной компоненте $\mathcal{M}^p(R)$. Например, для следа от первой степени оператора легко получить:

$$\mathrm{Tr}_R(M^{-1}Q\triangleright)M_1M_{\overline{2}}\dots M_{\overline{p}} = \xi\,\mathrm{Tr}_R(M^{-1})M_1M_{\overline{2}}\dots M_{\overline{p}}.$$

На классическом уровне соответствующие ораничения имеют довольно простую форму: $\mathrm{Tr}(M^kK) = 0$. Эти равенства означают, что $gl^*(m)$-модуль, порожденный инфинитезимельными векторными полями, возникающими из действия группы $GL(m)$ на $gl^*(m)$, представляет собой фактор свободного $gl^*(m)$-модуля. Более сложный вид квантовой формулы (4.36) возникает вследствие того, что квантованные векторные поля Q есть в определенном смысле “экспоненцированные” классические дифференциальные операторы.

Обратимся теперь к вопросу построения аналогов некоммутативных частных производных. В твистованной дифференциальной алгебре $\mathcal{B}_r(\mathcal{L}(R),\mathcal{M}(R))$ (см. определение (73)) сделаем лиенйный сдвиг генераторов подалгебры уравнения отражений и перейдем к модифицированной алгебре

$$L = I - (q-q^{-1})K,$$

где мы ввели новый числовой параметр $\hbar$. Как отмечалось выше, квазиклассический предел генераторов K — правоинвариантные векторные поля на $gl^*(m)$:

$$K_i^j \xrightarrow{q\to 1} m_i^s \frac{\partial}{\partial m_j^s},$$

где m_i^j — базис координатных функций в $gl^*(m)$. Вид квазиклассического предела подсказывает выбор новых генераторов, которые могут быть аналогами частных производных в пространстве квантованных функций. Введем генераторы D_i^j соотношением:

$$D = M^{-1}K, \qquad D = \|D_i^j\|.$$

Перестановочные соотношения твистованной дифференциальной алгебры в новых генераторах устанавливаются следующим утверждением.

Утверждение 80 *В твистованной дифференциальной алгебре $\mathcal{B}_r(\mathcal{L}(R), \mathcal{M}(R))$ справедливы следующие перестановочные соотношения:*

$$\begin{array}{rcl} R\,M_1 R\,M_1 & = & M_1 R\,M_1 R, \\ R^{-1} D_1 R^{-1} D_1 & = & D_1 R^{-1} D_1 R^{-1}, \\ D_1 R\,M_1 R & = & R\,M_1 R^{-1} D_1 + R. \end{array} \tag{4.37}$$

Доказательство этого утверждения легко проводится прямыми вычислениями. Для задания действия генераторов D_i^j на координатные функции M_i^j достаточно определить его на единице алгебры. Прямым следствием определения $D = M^{-1}K$ является следующий результат:

$$D_i^j \triangleright 1_{\mathcal{B}} = 0.$$

Выполним также аналогичный линейный сдвиг генераторов координатных функций:

$$M = N - \frac{\hbar}{q - q^{-1}}\, I.$$

Перестановочные соотношения в нашей дифференциальной алгебре примут следующий вид:

$$\begin{array}{rcl} R\,N_1 R\,N_1 - N_1 R\,N_1 R & = & \hbar\,(R\,N_1 - N_1 R), \\ R^{-1} D_1 R^{-1} D_1 & = & D_1 R^{-1} D_1 R^{-1}, \\ D_1 R\,N_1 R - R\,N_1 R^{-1} D_1 & = & R + \hbar\, D_1 R. \end{array} \tag{4.38}$$

Преимущества введения такого набора генераторов в том, что квазиклассический предел $q \to 1$ позволяет получить нетривиальное некоммутативное дифференциальное исчисление на универсальной обертывающей алгебре $U(gl(m))$.

В заключение определим общие формулы для действия генераторов D на мономах от генераторов алгебры квантованных функций.

Утверждение 81 *Действие генераторов D_i^j на подалгебре $\mathcal{N}(R)$ может быть расширено до действия всей подалгебры $\mathcal{D}(R)$: $\mathcal{D}(R) \otimes \mathcal{N}(R) \stackrel{\triangleright}{\to} \mathcal{N}(R)$. Это действие дает представление алгебры $\mathcal{D}(R)$ в алгебре $\mathcal{N}(R)$.*

Рассмотрим случай, когда R-матрица $R : V^{\otimes 2} \to V^{\otimes 2}$ представляет собой инволютивную симметрию. Введем следующие обозначения для цепочек R-матриц:

$$\mathcal{R}_{kp} = R_{p-1}R_{p-2}\ldots R_{k+1}R_kR_{k+1}\ldots R_{p-2}R_{p-1}, \quad 1 \le k < p.$$

Уравнение Янга-Бакстера на R позовляет переписать это определение в эквивалентной форме:

$$\mathcal{R}_{kp} = R_kR_{k+1}\ldots R_{p-2}R_{p-1}R_{p-2}\ldots R_{k+1}R_k, \quad 1 \le k < p.$$

Для произвольных i, j, k имеется следующее правило "перестановки индексов", хорошо известное для обычных операторов перестановки:

$$\mathcal{R}_{ij}\mathcal{R}_{ik} = \mathcal{R}_{jk}\mathcal{R}_{ij} = \mathcal{R}_{ik}\mathcal{R}_{kj}.$$

Введем удобное обозначение для произвольной $\dim V \times \dim V$ матрицы N:

$$N_{\overline{k}} = R_{k-1}\ldots R_1N_1R_1^{-1}\ldots R_{k-1}^{-1}. \tag{4.39}$$

Тогда справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{pk}\, N_{\overline{k}} &= N_{\overline{p}}\, \mathcal{R}_{pk}, \quad k > p, \\ \mathcal{R}_{kp}\, N_{\overline{k}} &= N_{\overline{p}}\, \mathcal{R}_{kp}, \quad k < p, \\ \mathcal{R}_{pk}\, N_{\overline{s}} &= N_{\overline{s}}\, \mathcal{R}_{pk}, \quad \forall\, s \notin \{p, k\}. \end{aligned} \tag{4.40}$$

Для инволютивной R-матрицы R соотношение (4.39) может быть записано в виде:

$$N_{\overline{k}} = R_{k-1}\ldots R_1N_1R_1\ldots R_{k-1}.$$

Перепишем теперь перестановочные соотношения между D и N (третья строка в системе (4.38)) іследующим образом:

$$D_1 N_{\overline{2}} = N_{\overline{2}} D_1 + \hbar D_1 R_1 + R_1. \tag{4.41}$$

Для дальнейшего удобно модифицировать матрицу генераторов D, добавив к ней единичную матрицу:

$$\tilde{D} = \hbar^{-1}\,\mathrm{Id} + D. \tag{4.42}$$

Тогда правило (4.41) примет вид:

$$\tilde{D}_1 N_{\overline{2}} = N_{\overline{2}} \tilde{D}_1 + \hbar\, \tilde{D}_1 \mathcal{R}_{12}.$$

Это соотношение легко обобщается на матричные копии:

$$\tilde{D}_1 N_{\overline{k}} = N_{\overline{k}} \tilde{D}_1 + \hbar\, \tilde{D}_1 \mathcal{R}_{1k}, \quad \forall\, k \geq 2. \tag{4.43}$$

Действие генераторов $\tilde{D}$ на любой элемент подалгебры $\mathcal{N}(R)$ получется по тому же рецепту, что и ранее, с единственной модификацией в действии на единичный элемент: теперь мы будем иметь $\tilde{D} \triangleright 1_{\mathcal{B}} = \hbar^{-1}\, 1_{\mathcal{B}}$.

Тепрь, пользуясь формулой (4.43), можно выписать перестановочные соотношения между матрицей квантовых производных $\tilde{D}$ и некоторыми полиномами малой степени от генераторов N

$$\begin{aligned}
\tilde{D}_1 N_{\overline{2}} N_{\overline{3}} &= N_{\overline{2}} N_{\overline{3}} \tilde{D}_1 + \hbar \left(N_{\overline{2}} \tilde{D}_1 \mathcal{R}_{13} + N_{\overline{3}} \tilde{D}_1 \mathcal{R}_{12} \right) + \hbar^2 \tilde{D}_1 \mathcal{R}_{12} \mathcal{R}_{23}, \\
\tilde{D}_1 N_{\overline{2}} N_{\overline{3}} N_{\overline{4}} &= N_{\overline{2}} N_{\overline{3}} N_{\overline{4}} \tilde{D}_1 + \hbar \left(N_{\overline{2}} N_{\overline{3}} \tilde{D}_1 \mathcal{R}_{14} + N_{\overline{2}} N_{\overline{4}} \tilde{D}_1 \mathcal{R}_{13} + N_{\overline{3}} N_{\overline{4}} \tilde{D}_1 \mathcal{R}_{12} \right) \\
&\quad + \hbar^2 \left(N_{\overline{2}} \tilde{D}_1 \mathcal{R}_{13} \mathcal{R}_{34} + N_{\overline{3}} \tilde{D}_1 \mathcal{R}_{12} \mathcal{R}_{24} + N_{\overline{4}} \tilde{D}_1 \mathcal{R}_{12} \mathcal{R}_{23} \right) + \hbar^3 \tilde{D}_1 \mathcal{R}_{12} \mathcal{R}_{23} \mathcal{R}_{34}.
\end{aligned}$$

Отсюда сразу следует результат действия матрицы D на эти полиномы:

$$\begin{aligned}
D_1 \triangleright N_{\overline{2}} &= \mathcal{R}_{12}, \\
D_1 \triangleright N_{\overline{2}} N_{\overline{3}} &= N_{\overline{2}} \mathcal{R}_{13} + N_{\overline{3}} \mathcal{R}_{12} + \hbar\, \mathcal{R}_{12} \mathcal{R}_{23}, \\
D_1 \triangleright N_{\overline{2}} N_{\overline{3}} N_{\overline{4}} &= N_{\overline{2}} N_{\overline{3}} \mathcal{R}_{14} + N_{\overline{2}} N_{\overline{4}} \mathcal{R}_{13} + N_{\overline{3}} N_{\overline{4}} \mathcal{R}_{12} \\
&\quad + \hbar \left(N_{\overline{2}} \mathcal{R}_{13} \mathcal{R}_{34} + N_{\overline{3}} \mathcal{R}_{12} \mathcal{R}_{24} + N_{\overline{4}} \mathcal{R}_{12} \mathcal{R}_{23} \right) + \hbar^2 \mathcal{R}_{12} \mathcal{R}_{23} \mathcal{R}_{34}.
\end{aligned}$$

Чтобы выписать общий результат, введем некоторые дополнительные обозначения. Во-первых, для любого множества целых чисел $2 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_s \leq p$ обозначии символом

$$\mathcal{R}_{(1k_1 \ldots k_s)} = \mathcal{R}_{1k_1} \mathcal{R}_{k_1 k_2} \ldots \mathcal{R}_{k_{s-1} k_s},$$

аналог циклической перестановки $(1k_1k_2\dots k_s)$ в симметрической группе S_p. Во-вторых, для того же набора целых чисел введем обозначение

$$(N_{\overline{2}}\dots N_{\overline{p}})^{(k_1\dots k_s)} = N_2\dots N_{\overline{k_1-1}}N_{\overline{k_1+1}}\dots N_{\overline{k_s-1}}N_{\overline{k_s+1}}\dots N_{\overline{p}},$$

то есть это моном по генераторам N, который получается из монома $N_{\overline{2}}\dots N_{\overline{p}}$ вычеркиванием множителей $N_{\overline{k_1}}, N_{\overline{k_2}}, ..., N_{\overline{k_s}}$.

Общий результат перестановки матицы квантовых производных и монома генераторов алгебры квантованных функций может быть получен индукцией по степени монома — целому числу $p \geq 2$:

$$\tilde{D}_1 N_{\overline{2}}\dots N_{\overline{p}} = N_{\overline{2}}\dots N_{\overline{p}}\tilde{D}_1 + \sum_{s=1}^{p-1} \hbar^s \sum_{2\leq k_1<\dots<k_s\leq p} (N_{\overline{2}}\dots N_{\overline{p}})^{(k_1\dots k_s)}\,\tilde{D}_1\mathcal{R}_{(1k_1\dots k_s)}. \quad (4.44)$$

И, наконец, пользуясь правилом действия квантовых производных на единицу алгебры, получаем рузультат действия матрицы D на произвольный моном из генераторов алгебы квантованных функций:

$$D_1 \triangleright N_{\overline{2}}\dots N_{\overline{p}} = \sum_{s=1}^{p-1} \hbar^{s-1} \sum_{2\leq k_1<\dots<k_s\leq p} (N_{\overline{2}}\dots N_{\overline{p}})^{(k_1\dots k_s)}\,\mathcal{R}_{(1k_1\dots k_s)}. \quad (4.45)$$

4.3 Пример: атом водорода в некоммутативном пространтсве

Рассмотрим дифференциальное уравнение типа уравнения Шредингера в центральном поле

$$(a\partial_\tau + b\Delta + \frac{q}{r_\hbar})\,(\psi) = 0 \quad (4.46)$$

где $r_\hbar$ есть квантовый радиус а a, b, q представляют собой некоторые числовые константы. Удобно искать решение для функции ψ в следующем виде:

$$\psi = \psi^{(k)}(\tau, r_\hbar)\,v = f_E(\tau)\phi(r_\hbar)\,v,$$

где $v \in V^k$, $\psi^{(k)}(\tau, r_\hbar) \in Z(\mathcal{A}_\hbar)$ и $f_E(\tau) = (1+\hbar E)^{\tau/\hbar}$.

Далее мы будем рассматривать простейший случай $k = 0$. Пользуясь свойтсвами функции $f_E(\tau)$, можно получить такое уравнение на $\phi(r_\hbar)$:

$$
\begin{aligned}
aE\phi(r_\hbar) &+ a\xi(E)\,\frac{\phi(r_\hbar+\hbar)(r_\hbar+\hbar)+\phi(r_\hbar-\hbar)(r_\hbar-\hbar)-2r_\hbar\phi(r_\hbar)}{2\hbar\, r_\hbar} \\
&+ b\xi(E)^2\left[\frac{\phi(r_\hbar+2\hbar)-\phi(r_\hbar-2\hbar)}{2\hbar\, r_\hbar}+\frac{\phi(r_\hbar+2\hbar)+\phi(r_\hbar-2\hbar)-2\phi(r_\hbar)}{4\hbar^2}\right] \\
&+ \frac{q}{r_\hbar}\,\phi(r_\hbar)=0,
\end{aligned}
$$

где $\xi(E)=1+\hbar E$.

Будем искать основное состояние нашей системы в виде, аналогичном коммутативному случаю: $\phi(r_\hbar)=e^{-\sigma r_\hbar}$ с некоторым параметром σ. Подставляя этот анзац в уравнение, получаем следующее:

$$
\begin{aligned}
aEr_\hbar &+ \frac{a\xi(E)}{2\hbar}\,\left(r_\hbar(e^{\sigma\hbar}+e^{-\sigma\hbar}-2)-\hbar(e^{\sigma\hbar}-e^{-\sigma\hbar})\right) \\
&+ \frac{b\xi(E)^2}{4\hbar^2}\left[r_\hbar(e^{2\sigma\hbar}+e^{-2\sigma\hbar}-2)-2\hbar(e^{2\sigma\hbar}-e^{-2\sigma\hbar})\right]+q=0.
\end{aligned}
$$

Собирая отдельно слагаемые, содержащие и не содержащие $r_\hbar$, придем к системе уравнений для определения энергии основного состояни E и эффективного обратного радиуса σ:

$$
\begin{cases}
aE+2\,\dfrac{a\xi(E)}{\hbar}\,\sinh^2(\sigma\hbar/2)+\dfrac{b\xi^2(E)}{\hbar^2}\,\sinh^2(\sigma\hbar)=0 \\
a\xi(E)\sinh(\sigma\hbar)+\dfrac{b\xi^2(E)}{\hbar}\,\sinh(2\sigma\hbar)-q=0
\end{cases}
$$

или

$$
\begin{cases}
\xi(E)=2\,\dfrac{\cosh(\sigma\hbar)-\sinh(\sigma\hbar)q/(2a)}{1+\cosh^2(\sigma\hbar)} \\
\xi^2(E)=\dfrac{a\hbar}{b}\,\dfrac{1-\xi(E)\cosh(\sigma\hbar))}{\sinh^2(\sigma\hbar)}
\end{cases}. \tag{4.47}
$$

Эта система сводится к уравнению на переменную $y=\tanh(\sigma\hbar)$:

$$
(\omega/2-2\rho^2)y^3+\rho(4-\omega)y^2-(\omega+2)y+2\rho\omega=0, \tag{4.48}
$$

где

$$
\rho=\frac{q}{2a},\quad \omega=\frac{a\hbar}{b}.
$$

В коммутативном пределе $\hbar \to 0$ приведенное выше уравнение в главном (нулевом) порядке по $\hbar$ имеет решение:

$$\sigma_0 = \frac{q}{2b}, \tag{4.49}$$

тогда как главный порядок для энергии основного состояния может быть получен из первой строки системы уравнений (4.47)

$$E_0 = -\frac{q}{2a}\,\sigma_0 = -\frac{q^2}{4ab}. \tag{4.50}$$

Эти предельные значения совпадают с соответствующими решениями дифференциального уравнения

$$\left(aE + b\left(\frac{2}{r}\,\partial_r + \partial_r^2\right) + \frac{q}{r}\right)\,(\phi(r)) = 0,$$

которое представляет собой коммутативный предел уравнения (4.46) с нулевым угловым моментом. Ниже мы вычисляем поправки первого порядка по $\hbar$ к значениям E_0 и σ_0. Выяснение физического смысла других решений уравнения (4.48) требует дополнительных исследований.

Поправки первого порядка по $\hbar$ к классическому результату (4.49) и (4.50) можно найти из системы (4.47). Мы представим результат вычислений для физически значимых значений параметров a, b, q входящих в уравнение (4.46). А именно, положим $a = h_{pl}c$, $b = h_{pl}^2/2m$, $q = e^2$, где h_{pl} есть постоянная Планка, c есть скорость света, m — масса электрона, а e^2 — квадрат его электрического заряда. Кроме того, перенормируем энергию $E \to E/(h_{pl}c)$. Удобно ввести безразмерную константу α — постоянную тонкой структуры и длину волны Де Бройля электрона λ_B:

$$\alpha = \frac{e^2}{h_{pl}c}, \qquad \lambda_B = \frac{h_{pl}}{mc}.$$

После этого наш ответ принимает следующий простой вид:

$$E = -mc^2\,\frac{\alpha^2}{2}\left(1 - \frac{\hbar}{4\lambda_B}\,\left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right)\right) + O(\hbar^2) \tag{4.51}$$

$$\sigma = \frac{\alpha}{2\lambda_B}\,\left(1 - \frac{\hbar}{\lambda_B}\,(1 - \alpha^2)\right) + O(\hbar^2). \tag{4.52}$$

Как следует из этих выражений, некоммутативность пространства-времени приводит к сдвигу вверх уровня энергии основного состояния, а также к увеличению эффективного размера атома в основном состояни, поскольку параметр σ обратно пропорционален эффективному радиусу обиты электрона в основном состоянии.

Заключение

В заключение работы перечислим основные результаты, представляемые к защите.

- Исследована алгебраическая структура широкого класса квантовых матричных алгебр, представляющих собой квадратичные некоммутативные алгебры симметрий точно решаемых моделей статистической физики и теории поля. В частности, для квантовых матриц найдены полиномиальные тождества, обобщающие известные тождества Гамильтона-Кэли классической матричной алгебры, введено понятие спектра и получена спектральная параметризация элементов характеристической подалгебры.

- Введено новое понятие квантовой симметрической функции Шура и доказано, что произведения квантовых функций Шура подчиняются классическому правилу Литтлвуда-Ричардсона. Найдена спектральная параметризация функций Шура и показано, что они являются обобщениями суперсимметрических полиномов от спектральных значений квантовой матрицы. Для функций Шура найдены неизвестные ранее серии билинейных соотношений, справедливых и для классических функций Шура. Эти соотношения могут найти приложения в теории представлений групп и алгебр Ли, а также в стохастических моделях, описываемых разностными уравнениями.

- Решена задача построения конечномерных представлений алгебры уравнения отражений: введена квазитензорная категория конечномерных модулей, описано множество объектов и построено множество категорных морфизмов. В алгебре уравнения отражений найдено твистованное коумножение и на его основе определены правила тензорного произведения представлений и разложения их на неприводимые компоненты. Для ряда важных в приложениях представлений явно вычислен спектр центральных элементов алгебры.

- Предложен новый подход к построению квантовых многообразий, представляющих собой квантование алгебры наблюдаемых на нетривиальном фазовом пространстве с нелинейными скобками Пуассона. В отличие от существующих методов работы с такими системами, разработанный в диссертации подход приводит к явному построению квантовой алгебры, не опирающемуся на формальные ряды по параметру квантования, а также позволяет сохранить симметрии классической системы и обеспечить совпадение числа независимых элементов в квантовой и классической алгебрах.

- Введены понятия касательных векторов и инвариантных дифференциальных операторов, действующих на функции на квантовом многообразии. Важным примером такого оператора является оператор Лапласа. Построена алгебра некоммутативных частных производных, найдено модифицированное правило Лейбница, позволяющее вычислять действие этих производных на некоммутативных функциях. В качестве приложения математических конструкций некоммутативной геометрии рассмотрены модели атома водорода в некоммутативном пространстве и свободные полевые уравнения Клейна-Гордона и Дирака. Для атома водорода вычислены поправки в спектр и волновую функцию, происходящие от некоммутативности пространства, для свободных полевых уравнений найдены решения в виде аналогов плоских волн.

Благодарности. Я считаю своим приятным долгом выразить глубокую и сердечную благодарность моим давним соавторам, друзьям и учителям Павлу Николаевичу Пятову и Дмитрию Ильичу Гуревичу за плодотворное совместное сотрудничество, без которого эта диссертация никогда не была бы написана.

Хочу также выразить благодарность и признательность Александру Витальевичу Разумову, Владимиру Алексеевичу Петрову и всем остальным сотрудникам Отдела теоретической физики ИФВЭ, поддержку и благожелательное внимание которых я чувствовал все годы работы рядом с ними.

И, наконец, хочу выразить особую благодарность всей своей семье за терпение, веру, поддрежку и понимание, которые я всегда получаю от них в любых жизненных ситуациях.

Приложение А

Сведениия об алгебрах Гекке

В этом разделе мы приведем сводку сведений о структуре алгебр Гекке серии A_{n-1}. При рассмотрении квантовых матричных алгебр эти результаты будут основой нашего технического арсенала. Доказательства приведенных утверждений содержатся в работах [16, 69]. Более подробное изложение материала, а также список литературы по теме можно найти в обзорах [73, 81].

Диаграммы и таблицы Юнга

Прежде всего, напомним некоторые основные определения из теории разбиений. В основном мы будем пользоваться терминологией и обозначениями принятыми в книге [65].

Разбиением λ натурального числа n (символическая запись: $\lambda \vdash n$) называется невозрастающая последовательность неотрицательных целых чисел λ_i, сумма которых равна n:

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots), \quad \lambda_i \geq \lambda_{i+1}: \quad |\lambda| \equiv \sum \lambda_i = n,$$

при этом $|\lambda| = n$ называется *весом* разбиения λ. Графически разбиения удобно представлять в виде диаграмм Юнга (см. [65]), и мы их в дальнейшем будем отождествлять.

Каждой клетке диаграммы Юнга, лежащей на пересечении s-го столбца и r-й строки, сопоставим число $c = s - r$, которое будем называть *содержанием* этой клетки.

На множестве диаграмм Юнга введем отношение включения $\subset$ полагая, что две диаграммы λ и μ связаны отношением $\lambda \subset \mu$ в случае, если при наложении диаграмма λ целиком помещается внутри μ, т.е. $\lambda_i \leq \mu_i$ $i = 1, 2, \dots$

По любой диаграмме Юнга $\lambda \vdash n$ можно построить $n!$ *таблиц* Юнга, вписывая в клетки диаграммы все натуральные числа от 1 до n в произвольном порядке. Для обозначения таблиц введем символ

$$\begin{Bmatrix} \lambda \\ \alpha \end{Bmatrix}, \qquad \alpha = 1, 2, \dots, n!, \tag{A.1}$$

где индекс α нумерует различные таблицы. Диаграмму λ назовем *формой* таблицы $\begin{Bmatrix} \lambda \\ \alpha \end{Bmatrix}$.

На множестве таблиц, отвечающих диаграмме $\lambda \vdash n$, можно естественным образом определить действие симметрической группы n-го порядка S_n. По определению, действие произвольного элемента $\pi \in S_n$ на некоторую таблицу приводит к замене каждого числа i в клетках таблицы на число $\pi(i)$. Результат действия π на таблицу $\begin{Bmatrix} \lambda \\ \alpha \end{Bmatrix}$ обозначим $\begin{Bmatrix} \lambda \\ \pi(\alpha) \end{Bmatrix}$.

Из всех таблиц Юнга формы $\lambda \vdash n$ выделим подмножество *стандартных* таблиц, удовлетворяющих дополнительному условию: заполняющие их числа возрастают при движении по любой строке слева направо и по любому столбцу сверху вниз. В дальнейшем изложении мы будем пользоваться только стандартными таблицами Юнга и сохраним для них обозначение (A.1). Однако индекс α теперь будет изменяться в пределах от 1 до числа d_λ, равного количеству стандартных таблиц, которые можно построить по диаграмме Юнга λ. Различные явные выражения для d_λ приведены, например, в [65].

Подмножество стандартных таблиц не замкнуто относительно введенного выше действия симметрической группы S_n, однако это подмножество является циклическим, т.е., любая стандартная таблица Юнга формы λ может быть получена из всякой другой стандартной таблицы той же формы действием некоторого элемента π из группы S_n

$$\forall\, \alpha, \beta \quad \exists \pi \in S_n : \quad \left\{ {\lambda \atop \alpha} \right\} \mapsto \left\{ {\lambda \atop \beta} \right\} \equiv \left\{ {\lambda \atop \pi(\alpha)} \right\}.$$

На множество стандартных таблиц можно распространить отношение включения, определенное выше для диаграмм Юнга. Мы будем говорить, что одна таблица содержит в себе другую и обозначать это символом

$$\left\{ {\lambda \atop \alpha} \right\} \subset \left\{ {\mu \atop \beta} \right\},$$

если $\lambda \subset \mu$, и числа от 1 до $|\lambda|$ расположены в таблице $\left\{ {\mu \atop \beta} \right\}$ на тех же местах, что и в таблице $\left\{ {\lambda \atop \alpha} \right\}$.

Алгебры Гекке: определение и базис матричных единиц

Алгебра Гекке серии A_{n-1} — $\mathcal{H}_n(q)$ — это ассоциативная $\mathbb{C}$-алгебра, порождаемая единицей $\mathbf{1}$ и набором образующих $\{\sigma_i\}_{i=1}^{n-1}$, для которых выполнены соотношения

$$\sigma_k \sigma_{k+1} \sigma_k = \sigma_{k+1} \sigma_k \sigma_{k+1} \ , \qquad k = 1, \ldots, n-2 \ , \tag{A.2}$$

$$\sigma_k \sigma_j = \sigma_j \sigma_k \ , \qquad \text{если} \ \ |k-j| \geq 2 \ , \tag{A.3}$$

$${\sigma_k}^2 = \mathbf{1} + (q - q^{-1}) \sigma_k \ , \qquad k = 1, \ldots, n-1 \ . \tag{A.4}$$

Последнее из определяющих соотношений зависит от параметра $q \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ и называется условием Гекке.

$\mathcal{H}_n(1)$ совпадает с групповой алгеброй симметрической группы S_n. В случае, если

$$k_q := \frac{q^k - q^{-k}}{q - q^{-1}} \neq 0\,, \text{ при всех } k = 2, 3, \ldots, n, \tag{A.5}$$

алгебра $\mathcal{H}_n(q)$ полупроста и изоморфна $\mathbf{C}[S_n]$. В дальнейшем мы будем полагать, что условия (A.5) выполнены при всех $k \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$. В этом предположении алгебра $\mathcal{H}_n(q)$ изоморфна прямой сумме матричных алгебр

$$\mathcal{H}_n(q) \cong \bigoplus_{\lambda \vdash n} \mathrm{Mat}_{d_\lambda}(\mathbf{C}). \tag{A.6}$$

Здесь $\mathrm{Mat}_m(\mathbf{C})$ обозначает ассоциативную $\mathbf{C}$-алгебру, порожденную m^2 генераторами E_{ab} $1 \le a, b \le m$ (матричными единицами), со следующим законом умножения

$$E_{ab}\, E_{cd} = \delta_{bc}\, E_{ad}.$$

В силу изоморфизма (A.6) можно построить набор элементов $E^\lambda_{\alpha\beta} \in \mathcal{H}_n(q)$, $\forall\, \lambda \vdash n$, $1 \le \alpha, \beta \le d_\lambda$, которые являются образами матричных единиц, генерирующих слагаемые Mat_{d_λ} в прямой сумме (A.6)

$$E^\lambda_{\alpha\beta}\, E^\mu_{\gamma\tau} = \delta^{\lambda\mu} \delta_{\beta\gamma}\, E^\lambda_{\alpha\tau}. \tag{A.7}$$

Диагональные матричные единицы $E^\lambda_{\alpha\alpha} \equiv E^\lambda_\alpha$ являются примитивными идемпотентами алгебры $\mathcal{H}_n(q)$, а набор всех элементов $E^\lambda_{\alpha\beta}$ образует линейный базис в $\mathcal{H}_n(q)$.

Реализация матричных единиц $E^\lambda_{\alpha\beta}$, очевидно, неоднозначна. В работах [69, 81] (см. также обзор [73]) построен базис матричных единиц, удовлетворяющих ряду дополнительных соотношений. В дальнейшем мы используем именно этот базис. Обсудим кратко те из его свойств, которые нам будут полезны.

Во-первых, в этом базисе известны замечательно простые формулы для элементов, осуществляющих преобразования между различными диагональными матричными единицами. Чтобы их описать, нам потребуется еще несколько определений.

Каждому из генераторов σ_i алгебры $\mathcal{H}_n(q)$ сопоставим

$$\sigma_i(x) := \sigma_i + \frac{q^{-x}}{x_q}\,\mathbf{1}, \quad 1 \le i \le n-1. \tag{A.8}$$

Здесь x – произвольное ненулевое целое число, а x_q определено в (А.5). Элементы $\sigma_i(x)$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \sigma_i(x)\sigma_{i+1}(x+y)\sigma_i(y) &= \sigma_{i+1}(y)\sigma_i(x+y)\sigma_{i+1}(x), && 1 \le i \le n-2, && \text{(A.9)} \\ \sigma_i(x)\sigma_i(-x) &= \frac{(x+1)_q(x-1)_q}{x_q^2}\,\mathbf{1}, && 1 \le i \le n-1. && \text{(A.10)} \end{aligned}$$

Рассмотрим произвольную стандартную таблицу Юнга $\left\{ {\lambda \atop \alpha} \right\}$, отвечающую некоторому разбиению $\lambda \vdash n$. Для каждого натурального числа $1 \le k \le n-1$, определим число $\ell_k\{{\lambda \atop \alpha}\}$ как разность содержаний клеток этой таблицы с номерами k и $(k+1)$

$$\ell_k\{{\lambda \atop \alpha}\} := c(k) - c(k+1). \tag{A.11}$$

Рассмотрим теперь таблицу $\left\{ {\lambda \atop \beta} \right\}$ (не обязательно стандартную), отличающиеся от исходной таблицы $\left\{ {\lambda \atop \alpha} \right\}$ только перестановкой клеток с номерами k и $(k+1)$

$$\beta = \pi_k(\alpha), \quad 1 \le k \le n-1, \tag{A.12}$$

где $\pi_k \in S_n$ есть транспозиция k и $(k+1)$. Если $\left\{ {\lambda \atop \pi_k(\alpha)} \right\}$ — стандартная таблица Юнга, то имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \sigma_k(\ell_k\{{\lambda \atop \alpha}\})\, E^\lambda_\alpha &= E^\lambda_{\pi_k(\alpha)}\, \sigma_k(-\ell_k\{{\lambda \atop \alpha}\})\,, && \text{(A.13)} \\ E^\lambda_\alpha\, \sigma_k(\ell_k\{{\lambda \atop \alpha}\}) &= \sigma_k(-\ell_k\{{\lambda \atop \alpha}\})\, E^\lambda_{\pi_k(\alpha)}\,. && \text{(A.14)} \end{aligned}$$

Цикличность набора стандартных таблиц Юнга относительно действия симметрической группы, а также тот факт, что любая перестановка может быть (не единственным способом) разложена в произведение транспозиций, позволяют связать любую пару E^λ_α и E^λ_β посредством цепочки соотношений вида (А.13), (А.14). Соотношения (А.9), (А.10) гарантируют при этом совместность всех возможных формул связи между E^λ_α и E^λ_β.

В случае, если $\left\{ {\lambda \atop \pi_k(\alpha)} \right\}$ — нестандартная таблица Юнга, выполняются соотношения

$$\sigma_k(\ell_k\{{\lambda \atop \alpha}\})\, E^\lambda_\alpha = E^\lambda_\alpha\, \sigma_k(\ell_k\{{\lambda \atop \alpha}\}) = 0. \tag{A.15}$$

Из формул (А.13), (А.14) следуют выражения для недиагональных матричных единиц. Полагая, что обе таблицы $\left\{ {\lambda \atop \alpha} \right\}$ и $\left\{ {\lambda \atop \pi_k(\alpha)} \right\}$ являются стандартными, имеем

$$\begin{aligned} E^\lambda_{\alpha\pi_k(\alpha)} &:= \omega(\ell_k\{{\lambda \atop \alpha}\})\, E^\lambda_\alpha\, \sigma_k(\ell_k\{{\lambda \atop \alpha}\})\,, && \text{(A.16)} \\ E^\lambda_{\pi_k(\alpha)\alpha} &:= \omega(\ell_k\{{\lambda \atop \alpha}\})\, \sigma_k(\ell_k\{{\lambda \atop \alpha}\})\, E^\lambda_\alpha\,, && \text{(A.17)} \end{aligned}$$

где нормировочный коэффициент $\omega(\ell)$ подбирается из условия

$$\omega(\ell)\,\omega(-\ell) = \frac{\ell_q^2}{(\ell+1)_q(\ell-1)_q}\,. \tag{A.18}$$

В частности, можно положить $\omega(\ell) := \ell_q/(\ell_q+1)$. Заметим, что если таблица $\left\{ {\lambda \atop \pi_k(\alpha)} \right\}$ является стандартной, то $\ell_k\{{\lambda \atop \alpha}\} \neq \pm 1$. Поэтому приведенное выражение для нормировочного коэффициента всегда корректно определено.

Чтобы сформулировать второе используемое нами свойство матричных единиц, рассмотрим цепочку вложений алгебр Гекке

$$\mathcal{H}_2(q) \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow \mathcal{H}_k(q) \hookrightarrow \mathcal{H}_{k+1}(q) \hookrightarrow \ldots, \tag{A.19}$$

задаваемых на генераторах формулами

$$\mathcal{H}_k(q) \ni \sigma_i \mapsto \sigma_{i+1} \in \mathcal{H}_{k+1}(q), \quad i = 1, \ldots, k-1. \tag{A.20}$$

В каждой из подалгебр $\mathcal{H}_k(q)$ базис матричных единиц $E^\lambda_{\alpha\beta}$ можно выбрать таким образом, чтобы диагональные матричные единицы E^λ_α подалгебры $\mathcal{H}_k(q)$ раскладывались в сумму диагональных матричных единиц любой объемлющей алгебры $\mathcal{H}_m(q) \supset \mathcal{H}_k(q)$

$$E_\alpha^{\lambda\vdash k} = \sum_{\{{\lambda \atop \alpha}\}\subset\{{\mu \atop \beta}\}} E_\beta^{\mu\vdash m}, \quad m \geq k. \tag{A.21}$$

Здесь суммирование ведется по всем стандартным таблицам $\left\{ {\mu \atop \beta} \right\}$, $\mu \vdash m$, содержащим стандартную таблицу $\left\{ {\lambda \atop \alpha} \right\}$.

R-матричные представления алгебры Гекке

Пусть V – конечномерное линейное пространство над полем комплексных чисел, $\dim V = N$. Оператор $R \in \mathrm{Aut}(V^{\otimes 2})$, удовлетворяющий *уравнению Янга-Бакстера*

$$R_1R_2R_1 = R_2R_1R_2\,, \tag{A.22}$$

назовем *R-матрицей*. Нетрудно видеть, что всякая R-матрица, удовлетворяющая условию

$$(R - q\,\mathrm{Id}_{V^{\otimes 2}})(R + q^{-1}\,\mathrm{Id}_{V^{\otimes 2}}) = 0, \quad q \in \mathbf{C}\setminus\{0\}\,, \tag{A.23}$$

порождает представления ρ_R для серии алгебр Гекке $\mathcal{H}_k(q)$, $k = 2, 3, \ldots$

$$\rho_R : \mathcal{H}_k(q) \to \mathrm{End}(V^{\otimes k}) \qquad \sigma_i \mapsto \rho_R(\sigma_i) = R_i \qquad 1 \leq i \leq k-1, \tag{A.24}$$

где σ_i есть генераторы алгебры $\mathcal{H}_k(q)$ (A.2) – (A.4). Такие R-матрицы мы будем называть *геккевскими R-матрицами* или *симметриями Гекке*, а соответствующие представления ρ_R алгебр Гекке — *R-матричными*.

Пусть R — некоторая геккевская R-матрица. Предположим, что соответствующие ей представления $\rho_R : \mathcal{H}_k(q) \to \mathrm{End}(V^{\otimes k})$ точны при всех $2 \le k < (m+1)(n+1)$, а представление $\rho_R : \mathcal{H}_{(m+1)(n+1)}(q) \to \mathrm{End}(V^{\otimes(m+1)(n+1)})$ имеет ядро, порождаемое (любой) матричной единицей, отвечающей прямоугольной диаграмме Юнга $((n+1)^{(m+1)})$, то есть

$$\begin{aligned} &\rho_R(E_\alpha^{((n+1)^{(m+1)})}) = 0 \\ &\rho_R(E_\alpha^{\mu}) \neq 0, \qquad \text{при любых } \mu \vdash (m+1)(n+1),\ \mu \neq ((n+1)^{(m+1)}). \end{aligned} \tag{A.25}$$

Такую геккевскую R-матрицу мы будем называть R-матрицей $GL(m|n)$ *типа*. Как известно, (см. теорему 23 в разделе 2.1), для любой симметрии Гекке найдутся соответствующие числа m и n.

Заметим, что в приведенном выше определении не предполагается обязательного выполнения соотношения $m+n = N(=\dim V)$. Хотя в стандартных примерах эта связь параметров присутствует (например, в квантовых матричных алгебрах, построенных по стандартной R-матрице $GL(m|n)$ типа), известны и исключения из этого правила. Серия контрпримеров построена в работе [23].

R-след и пары совместимых R-матриц

Зафиксируем в пространстве V некоторый базис $\{v_i\}_{i=1}^N$. Символом X_{ij}^{kl} обозначим матрицу оператора $X \in \mathrm{End}(V^{\otimes 2})$ в базисе $\{v_i \otimes v_j\}_{i,j=1}^N$: $X(v_i \otimes v_j) := \sum_{k,l=1}^N X_{ij}^{kl}\, v_k \otimes v_l$.

Назовем оператор $X \in \mathrm{End}(V^{\otimes 2})$ *кособратимым*, если найдется матрица ${\Psi^X}_{ij}^{kl}$ такая, что

$$\sum_{a,b=1}^N X_{ia}^{kb} {\Psi^X}_{bj}^{al} = \delta_i^l\, \delta_j^k. \tag{A.26}$$

Нетрудно убедиться, что свойство кособратимости инвариантно относительно выбора базиса $\{v_i\}$, и матрице ${\Psi^X}_{ij}^{kl}$ можно сопоставить оператор $\Psi^X \in \mathrm{End}(\mathrm{V}^{\otimes 2})$. Обозначим

$$B^X := \mathrm{Tr}_{(1)} \Psi^X \in \mathrm{End}(V), \qquad C^X := \mathrm{Tr}_{(2)} \Psi^X \in \mathrm{End}(V), \tag{A.27}$$

где символы $\mathrm{Tr}_{(1)}$ (соответственно $\mathrm{Tr}_{(2)}$) обозначают взятие следа по первому (соответственно второму) пространству в произведении $V \otimes V$. Кософбратимый оператор X назовем *строго* кософбратимым, если оператор C^X обратим.

Рассмотрим множество $N \times N$ матриц $\mathrm{Mat}_N(W)$, матричные элементы которых принадлежат некоторому комплексному линейному пространству W. Множество $\mathrm{Mat}_N(W)$ очевидным образом наделяется структурой линейного пространства над **C**.

Пусть R — кософбратимая R-матрица. Отображение линейных пространств

$$\mathrm{Tr}_R : \mathrm{Mat}_N(W) \to W,$$

задаваемое формулой

$$\mathrm{Tr}_R(M) = \sum_{i,j=1}^{N} C^{R\,j}_{\ i} M^i_j , \quad M \in \mathrm{Mat}_N(W)\,, \tag{A.28}$$

назовем операцией взятия *R-следа.*

Хорошо известный пример строго кософбратимой R-матрицы дается супер-перестановкой на супер-пространстве $V = V_0 \oplus V_1$, где V_0 и V_1 есть соответственно четная и нечетная компоненты пространства V. В этом примере операторы B^R и C^R носят название операторов *четности* и их действие на произвольный вектор $z \in V$ описывается формулами

$$B^R(z) = C^R(z) = z_0 - z_1, \quad z = z_0 + z_1\,.$$

Здесь символ $z_0(z_1)$ обозначает четную (нечетную) компоненту вектора z.

Перечислим некоторые полезные свойства эндоморфизмов Ψ^R, B^R и C^R, построенных по кософбратимой R-матрице.

1. $$\mathrm{Tr}_R B^R = \mathrm{Tr}_R C^R,$$

   $$\mathrm{Tr}_{R(2)}\, B^R_2\, R_{21} = \mathrm{Tr}_{R(2)}\, C^R_2\, R_{12} = I_1\,, \tag{A.29}$$

   где I представляет собой тождественный автоморфизм пространства V. Эти соотношения непосредственно следуют из определений (A.26) и (A.27).

2. Эндоморфизмы B^R и C^R коммутируют и их произведение есть скалярный оператор

   $$B^R\, C^R = C^R\, B^R = \nu\, I\,, \tag{A.30}$$

где числовой множитель ν отличен от нуля в том и только том случае, когда матрица R строго кособратима (в частности, когда R является кособратимой Геккевской R-матрицей).

3. Матричные элементы B^R и C^R реализуют одномерное представление так называемой RTT алгебры, ассоциированной с R [83]

$$R_{12}B_1^R B_2^R = B_1^R B_2^R R_{12}, \qquad R_{12}C_1^R C_2^R = C_1^R C_2^R R_{12}\,. \tag{A.31}$$

Прямым следствием вышеприведенных соотношений являются следующие формулы для следов

$$\mathrm{Tr}_{(12)}(B_1^R B_2^R R_{12} X_{12} R_{12}^{-1}) = \mathrm{Tr}_{(12)}(B_1^R B_2^R R_{12}^{-1} X_{12} R_{12}) = \mathrm{Tr}_{(12)}(B_1^R B_2^R X_{12}),$$
$$\mathrm{Tr}_{(12)}(C_1^R C_2^R R_{12} X_{12} R_{12}^{-1}) = \mathrm{Tr}_{(12)}(C_1^R C_2^R R_{12}^{-1} X_{12} R_{12}) = \mathrm{Tr}_{(12)}(C_1^R C_2^R X_{12})\,,$$

где $X \in \mathrm{End}(V^{\otimes 2})$ есть произвольный эндоморфизм и $\mathrm{Tr}_{(12)}(\dots) = \mathrm{Tr}_{(1)}(\mathrm{Tr}_{(2)}(\dots))$.

4. Следующие соотношения доказаны в работах [43, 72]

$$\begin{aligned} B_1^R \Psi_{12}^R &= R_{21}^{-1} B_2^R, & \qquad \Psi_{12}^R B_1^R &= B_2^R R_{21}^{-1}, \\ C_2^R \Psi_{12}^R &= R_{21}^{-1} C_1^R, & \qquad \Psi_{12}^R C_2^R &= C_1^R\, R_{21}^{-1}\,, \end{aligned} \tag{A.32}$$

где $R_{21} = P R_{12} P$. В случае $\nu \neq 0$, только одна из приведенных выше строк независима в силу условия (A.30).

Пользуясь (A.32) и определением эндоморфизма Ψ^R, мы получаем следующие важные соотношения

$$\mathrm{Tr}_{(1)}(B_1^R R_{12} X_2 R_{12}^{-1}) = \mathrm{Tr}_{(1)}(B_1^R R_{12}^{-1} X_2 R_{12}) = \mathrm{Tr}(B^R X)\, I_2,$$
$$\mathrm{Tr}_{(2)}(C_2^R R_{12} X_1 R_{12}^{-1}) = \mathrm{Tr}_{(2)}(C_2^R R_{12}^{-1} X_1 R_{12}) = \mathrm{Tr}(C^R X)\, I_1\,, \tag{A.33}$$

где $X \in \mathrm{End}(V)$ есть произвольный эндоморфизм пространства V.

Замечание 82 В том случае, когда в качестве R-матрицы выбран оператор перестановки на суперпространстве $(m|n)$ типа (см. определение (1.8)), операция Tr_R совпадает с операцией взятия суперследа.

Упорядоченную пару $\{R, F\}$ двух R-матриц R и F назовем *совместимой парой*, если выполнены соотношения

$$\begin{aligned} R_1 F_2 F_1 &= F_2 F_1 R_2 \\ R_2 F_1 F_2 &= F_1 F_2 R_1 \end{aligned} \tag{A.34}$$

Перечислим некоторые свойства совместимых пар R-матриц.

1. Если R — кособратимая R-матрица, и $\{R, F\}$ — совместимая пара, то для всякого $M \in \mathrm{Mat}_N(W)$ выполнено соотношение

$$\mathrm{Tr}_{R(2)}(F_1^{\pm 1} M_1 F_1^{\mp 1}) = \mathrm{Id}_V \, \mathrm{Tr}_R M, \quad \text{где} \quad M_1 = M \otimes \mathrm{Id}_V. \tag{A.35}$$

2. Если $\{R, F\}$ — совместимая пара, то $R_f := F^{-1} R^{-1} F$ является R-матрицей, и пара $\{R_f, F\}$ совместима.

3. Пусть пара $\{R, F\}$ совместима, R-матрица R_f кособратима, матрицы R и F строго кособратимы. Тогда отображение $\phi : \mathrm{Mat}_N(W) \to \mathrm{Mat}_N(W)$, задаваемое формулой

$$\phi(M) := \mathrm{Tr}_{R(2)}(F_1 M_1 F_1^{-1} R_1), \qquad \forall\, M \in \mathrm{Mat}_N(W), \tag{A.36}$$

является обратимым. Явная формула для обратного отображения ϕ^{-1} имеет вид (см. [75])

$$\phi^{-1}(M) = \mathrm{Tr}_{R_f(2)}(F_1^{-1} M_1 R_1^{-1} F_1). \tag{A.37}$$

Приложение Б

Некоторые q-комбинаторные соотношения

В этом разделе дается вывод некоторых q-комбинаторных соотношений, использованных в доказательстве теоремы 11.

Для произвольного набора попарно различных ненулевых целых чисел b_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ справедливы следующие соотношения

$$q^k - \prod_{i=1}^{k} \frac{(b_i+1)_q}{(b_i)_q} = -\sum_{j=1}^{k} \frac{q^{-b_j}}{(b_j)_q} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} \frac{(b_i - b_j + 1)_q}{(b_i - b_j)_q}, \tag{Б.1}$$

$$k_q = \sum_{j=1}^{k} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} \frac{(b_i - b_j + 1)_q}{(b_i - b_j)_q}, \tag{Б.2}$$

$$\prod_{i=1}^{k} \frac{(b_i+1)_q}{(b_i)_q} = \sum_{j=1}^{k} \frac{(b_j + k)_q}{k_q (b_j)_q} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} \frac{(b_i - b_j + 1)_q}{(b_i - b_j)_q} \tag{Б.3}$$

Доказательство проводится индукцией по k. Проверка соотношений (Б.1)–(Б.3) для $k = 1$ легко выполняется прямыми вычислениями.

Допустим теперь, что соотношения (Б.1) выполнены для всех значений $k \le m$, и докажем, что тогда они справедливы и для $k = m+1$. С этой целью преобразуем выражение в левой части (Б.1) при $k = m + 1$

$$\begin{aligned} q^{m+1} - \prod_{i=1}^{m+1} \frac{(b_i+1)_q}{(b_i)_q} &= \left(q^{m+1} - q^m \frac{(b_{m+1}+1)_q}{(b_{m+1})_q} \right) + \left(q^m - \prod_{i=1}^{m} \frac{(b_i+1)_q}{(b_i)_q} \right) \frac{(b_{m+1}+1)_q}{(b_{m+1})_q} \\ &= - \frac{q^{m-b_{m+1}}}{(b_{m+1})_q} - \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{q^{-b_j}}{(b_j)_q} \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{m} \frac{(b_i - b_j + 1)_q}{(b_i - b_j)_q} \right) \frac{(b_{m+1}+1)_q}{(b_{m+1})_q} \, . \end{aligned} \tag{Б.4}$$

Здесь мы применили формулу (Б.1) при $k = m$ для преобразования последнего слагаемого в первой строчке. Воспользуемся далее тождеством

$$\frac{(b_{m+1}+1)_q}{(b_{m+1})_q} = \frac{(b_{m+1}-b+1)_q}{(b_{m+1}-b)_q} - \frac{(b)_q}{(b_{m+1})_q(b-b_{m+1})_q} \, , \tag{Б.5}$$

справедливым для любого целого $b \neq b_{m+1}$. Подставляя в (Б.5) вместо параметра b числа b_j, $j = 1, 2, \ldots m$, мы продолжаем наши вычисления

$$(\text{Б.4}) = -\sum_{j=1}^{m} \frac{q^{-b_j}}{(b_j)_q} \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{m+1} \frac{(b_i-b_j+1)_q}{(b_i-b_j)_q} - \frac{q^{-b_{m+1}}}{(b_{m+1})_q} \left(q^m + \sum_{j=1}^{m} \frac{q^{-b_j+b_{m+1}}}{(b_j-b_{m+1})_q} \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{m} \frac{(b_i-b_j+1)_q}{(b_i-b_j)_q} \right) .$$

Чтобы преобразовать последнее слагаемое вновь применим формулу (Б.1) для сдвинутого набора целых чисел $b_i \to (b_i - b_{m+1})$, $i = 1, 2, \ldots, m$

$$\begin{aligned} (\text{Б.4}) &= -\sum_{j=1}^{m} \frac{q^{-b_j}}{(b_j)_q} \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{m+1} \frac{(b_i-b_j+1)_q}{(b_i-b_j)_q} - \frac{q^{-b_{m+1}}}{(b_{m+1})_q} \left(\prod_{i=1}^{m} \frac{(b_i-b_{m+1}+1)_q}{(b_i-b_{m+1})_q} \right) \\ &= -\sum_{j=1}^{m+1} \frac{q^{-b_j}}{(b_j)_q} \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{m+1} \frac{(b_i-b_j+1)_q}{(b_i-b_j)_q} \, . \end{aligned}$$

Последнее равенство распространяет формулу (Б.1) на случай $k = m+1$, завершая индуктивное доказательство.

Чтобы получить равенства (Б.2), (Б.3) перепишем соотношение (Б.1), обратив параметр $q \to q^{-1}$

$$q^{-k} - \prod_{i=1}^{k} \frac{(b_i+1)_q}{(b_i)_q} = -\sum_{j=1}^{k} \frac{q^{b_j}}{(b_j)_q} \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{k} \frac{(b_i-b_j+1)_q}{(b_i-b_j)_q} \, , \tag{Б.6}$$

а затем образуем линейную комбинацию $((\text{Б}.1)\cdot q^x - (\text{Б}.6)\cdot q^{-x})\,/(q-q^{-1})$, где параметр x может принимать произвольные целые значения. Результат запишется в виде

$$(k+x)_q \;-\; (x)_q \prod_{i=1}^{k} \frac{(b_i+1)_q}{(b_i)_q} \;=\; \sum_{j=1}^{k} \frac{(b_j-x)_q}{(b_j)_q} \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{k} \frac{(b_i-b_j+1)_q}{(b_i-b_j)_q}\,. \qquad (\text{Б}.7)$$

Соотношения (Б.2) и (Б.3) получаются как частные случаи тождества (Б.7) при $x=0$ и $x=-k$ соответственно.

Список литературы

[1] A.O. Barut, R. Rączka, *“Theory of Group Representations and Applications”*, World Sci. Pub., the Second Ed., 1986.

[2] Berele A. and Regev A., *‘Hook Young diagrams with applications to combinatorics and to representations of Lie superalgebras’*. Adv. in Math. **64** (1987) no. 2, 118–175.

[3] Березин Ф.А., *‘Представления супергруппы $U(p,q)$’*. Функциональный анализ и его приложения, **10** (1976) № 3, 70–71.

[4] Berezin F.A., *‘Introduction to superanalysis’*. Edited and with a foreword by A. A. Kirillov. With an appendix by V. I. Ogievetsky. Translated from the Russian by J. Niederle and R. Kotecký. Translation edited by Dimitri Leĭtes. Mathematical Physics and Applied Mathematics, 9. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1987.

[5] Braverman A.,Gaistgory D. *The Poincaré-Brkhoff-Witt theorem for quadratic algebras of Koszul type*, J.Algebra **181** (1996) 315–328.

[6] Cherednik I. *Factorizing particles on a half line, and root systems*, English translation: Theoret. and Math. Phys. **61** (1984), 977–983.

[7] Chari V., Pressley. A. *A guide to quantum groups*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[8] Drinfeld V.G., *‘Quasi-Hopf Algebras’*. Leningrad Math. J. **1** (1990) 1419–1457.

[9] Drinfel'd V.G., *'Quantum groups'*. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, (Berkeley, Calif., 1986), 798–820, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.

[10] Drinfeld V. *On quadratic quasi-commutational relations in quasi-classical limit* English translation in : Selecta Math. Sovietica **11** (1992) no. 4, 317–326.

[11] Davydov A.A. *Totally positive sequences and R-matrix quadratic algebras*, J. Math. Sci. **100** (2001) 1871 – 1876.

[12] Dabrowski L., Grosse H., Hajac P. *Strong Connections and Chern-Connes pairing in the Hopf-Galois theory*, Commun. Math. Phys. **220** (2001) 301–331.

[13] Delius G.W., Gardner C., Gould M.D. *The structure of quantum Lie algebra for the classical series B_l, C_l and D_l*, J.Phys.A: Math. Gen. **31** (1998) 1995–2019.

[14] Donin J., Gurevich D., Shnider S. *Double quantization on some orbits in the coadjoint representation of simple Lie groups*, CMP **204** (1999), 39–60.

[15] Dung N.P, Hai P.H. *On the Poincaré series of quadratic algebras associated to Hecke symmetries* Int.Math.Res.Not **40** (2003) 2193–2203.

[16] Dipper R. and James G., *'Represenations of Hecke algebras of general linear groups'*, Proc. London Math. Soc. (3) **52** (1986) 20-52.
Dipper R. and James G., *'Blocks and idempotents of Hecke algebras of general linear groups'*, Proc. London Math. Soc. (3) **54** (1987) 57-82.

[17] Damaskinsky E.V., Kulish P.P., Sokolov M.A., *'Gauss Decomposition for Quantum Groups and Supergroups'* Zap. Nauch. Semin. POMI **211** (1995) 11–45.

[18] Donin J., Mudrov A. *Explicit equivariant quantization on (co)adjoint orbits of* $GL(n, \mathbf{C})$, Lett.Math.Phys. **62** (2002) 17–32.

[19] Donin J. *Double quantization on coadjoint representations of semisimple Lie groups and their orbits*, ArXiv: QA/9909160.

[20] Ewen H., Ogievetsky O. and Wess J., *'Quantum matrices in two dimensions'*. Lett. Math. Phys. **22** (1991) no.4, 297–305.

[21] Fulton W., Harris J. *Representation theory. A first course*, Springer-Verlag, NY, 1991.

[22] Faddeev L.D., Pyatov P.N., *'The Differential Calculus on Quantum Linear Groups'* Trans. Amer. Math. Soc. Ser. 2 **175** (1996) 35–47.

[23] Гуревич Д.И., *'Алгебраические аспекты уравнения Янга-Бакстера'*, Алгебра и Анализ, том **62**, вып. 4 (1990) 119 – 148.

[24] Gurevich D. *Generalized translation operators on Lie groups*, Engl. transl.: Soviet J. Contemporary Math. Anal. **18**, no. 4 (1983) 57–90.

[25] Gourevitch D. *Equation de Yang-Baxter et quantification des cocycles*, C.R.Acad.Sci. Paris, **310** (1990) 845–848.

[26] Gurevich D. *Braided modules and reflection equations*, Quantum Groups and Quantum spaces, Banach center publications, **40**, Institut of Mathematics, Polish Academy of Sciences, Warszawa (1995), 99–110.

[27] Gurevich G.B., *'Foundations of the Theory of Algebraic Invariants'.* P. Noordhoff Ltd. Groningen, 1964; Russian edition: Moscow–Leningrad, 1948.

[28] Gould M.D. and Links J.R., *'General eigenvalue formula for Casimir invariants of type I quantum superalgebras'.* J. Math. Phys. **37** (1996) no.5, 2426–2456.

[29] Gurevich D., Leclercq R., Saponov P. *Traces in braided categories*, J. Geom. Phys. **44** (2002), 251–278.

[30] Gurevich D., Leclercq R., Saponov P., *q-Index on braided noncommutative spheres*, J. Geom. Phys. **53** (2005), 392–420.

[31] Gould M.D., *'On the matrix elements of the $U(n)$ generators'.* J. Math. Phys. **22** (1981) 15–22.

[32] Gurevich D., Pyatov P., Saponov P., *'Hecke symmetries and characteristic relations on reflection equation algebras'.* Lett. Math. Phys. **41** (1997) 255–264.

[33] Гуревич Д.И., Пятов П.Н., Сапонов П.А., *'Теорема Гамильтона-Кэли для квантовых матричных алгебр $GL(m|n)$ типа'.* Алгебра и Анализ, **17**, № 1 (2005) 157–179.
English translation in: arXiv:math.QA/0412192.

[34] Гуревич Д.И., Пятов П.Н., Сапонов П.А., *Квантовые матричные алгебры $GL(m|n)$ типа II: структура характеристической подалгебры и ее спектральная параметризация*, Теоретическая и Математическая Физика, **147**, №1 (2006), стр. 14–46.

[35] D. Gurevich, P. Pyatov, P. Saponov, *Bilinear identities on Schur symmetric functions*, Journal of Nonlinear Mathematical Physics, **17**, Supplementary Issue 1 (2010) pp. 31–48.

[36] D. Gurevich, P. Pyatov, P. Saponov, *Braided differential operators on quantum algebras*, Journal of Geometry and Physics, **61** (2011) pp. 1485–1501.

[37] Gutt S., Rawnsley J. *Traces for star products on symplectic manifols*, Journal of Geometry and Physics, **42** (2002) pp. 12–18.

[38] Gurevich D., Saponov P., *'Quantum line bundles via Cayley-Hamilton identity'*, J. Phys. A: Math. Gen. **34** no. 21 (2001) pp. 4553 – 4569.

[39] Gurevich D., Saponov P. *On non-one-dimensional representations of the reflection equation algebra*, English translation: Theor. Math. Phys. **139** (2004), 486–499.

[40] Gurevich D., Saponov P., *'Quantum line bundles on a noncommutative sphere'* J. Phys. A: Math. Gen. **35** (2002) 9629–9643.

[41] Gurevich D., Saponov P. *Geometry of non-commutative orbits related to Hecke symmetries*, Contemporary Mathematics, **433** (2007) 209–250.

[42] Hlavaty L., *'Quantized Braided Groups'*. J. Math. Phys. **35** (1994) 2560–2569.

[43] Isaev A.P., *'Quantum groups and Yang-Baxter equations,'* Sov. J. Part. Nucl. **26** (1995) 501–526.

[44] Isaev A., Ogievetsky O. and Pyatov P., *'Generalized Cayley-Hamilton-Newton identities'*. Quantum groups and integrable systems (Prague, 1998). Czechoslovak J. Phys. **48** (1998) no.11, 1369–1374.

[45] Isaev A.P., Ogievetsky O.V., Pyatov P.N., *'On quantum matrix algebras satisfying the Cayley-Hamilton-Newton identities'*. J. Phys. A: Math. Gen. **32** (1999) L115-L121.

[46] Isaev A.P., Ogievetsky O.V., Pyatov P.N., *'Cayley-Hamilton-Newton Identities and Quasitriangular Hopf Algebras'*. In Proc. of International Workshop "Supersymmetries and Quantum Symmetries", July 27-31, 1999. Eds. E.Ivanov, S.Krivonos and A.Pashnev, JINR, Dubna E2-2000-82, pp. 397–405; Preprint `math.QA/9912197`.

[47] Isaev A.P., Ogievetski O.V., Pyatov P.N., Saponov P.A., *'Characteristic Polynomials for Quantum Matrices'*. In Proc. of International Conference in memory of V.I.Ogievetsky 'Supersymmetries and Quantum symmetries', (Dubna, Russia, 1997). Eds. J. Wess and E. Ivanov, Lecture Notes in Physics, vol. **524**, pp. 322 – 330, Springer Verlag, 1998.

[48] Isaev A.P., Pyatov P.N., *'Covariant differential complexes on quantum linear groups'* J. Phys. A: Math. Gen. **28** (1995) 2227-2246.

[49] Isaev A., Pyatov P. *Spectral extension of the quantum group cotangent bundle*, Comm. Math. Phys. **288** (2009) 1137–1179.

[50] Jarvis P.D. and Green H.S., *'Casimir invariants and characteristic identities for generators of the general linear, special linear and orthosymplectic graded Lie algebras'*. J. Math. Phys., **20** (1979) 2115–2122.

[51] Kulish P.P. *Representations of q-Minkowski space algebra*, St. Petersburg Math. J. **6** (1995), 365–374.

[52] Khudaverdian H.M. and Voronov Th.Th., *'Berezinians, Exterior Powers and Recurrent Sequences'*. arXiv:math.DG/0309188.

[53] Кириллов А.Н., *'Полнота состояний обобщенного магнетика Гейзенберга'*. Записки научных семинаров ЛОМИ, **134** (1984) 169–189;
English translation in: J. Soviet Math. **36** (1987) 115–128.

[54] Kleber M., *'Plücker relations on Schur functions'*. J. Algebraic Combin. **13** (2001) no. 2, 199–211; arXiv:math.QA/9907177.

[55] Кириллов А.Н., Решетихин Н.Ю., *'Представления Янгианов и множественность неприводимых компонент в тензорном произведении представлений простых алгебр Ли'*. Записки научных семинаров ЛОМИ, **160**

(1987) 211–221;
English translation in: J. Soviet Math. **52** (1990) no. 3, 3156–3164.

[56] Kulish P.P., Sasaki R., *'Covariance Properties of Reflection Equation Algebras'*. Prog. Theor. Phys., **89** (1993) 741 – 761.

[57] Kulish P.P., Sklyanin E.K., *'Algebraic structures related to reflection equations'*. J. Phys. A **25** (1992) no.22, 5963–5975.

[58] Khoroshkin S., Tolstoy V. *Universal R-matrix for quantized (super-)algebras*, CMP 141 (1991) 599–617.

[59] Kantor I., Trishin I., *'On a concept of determinant in the supercase'*. Comm. in Algebra, **22** (1994) 3679 – 3739.

[60] Kantor I., Trishin I., *'On the Cayley-Hamilton equation in the supercase'*. Comm in Algebra, **27** (1999) 233 – 259.

[61] Lyubashenko V. and Sudbery A., *'Quantum supergroups of $GL(n|m)$ type: differential forms, Koszul complexes and Berezinians'*. Duke Math. J. **90** (1997) no.1, 1–62; arXiv:hep-th/9311095.

[62] Lu J.-H.,Weinstein A. *Poisson Lie groups, dressing transformations, and Bruhat decompositions*, J. Differential Geom. **31** (1990) 501–526.

[63] Lipan O., Wiegmann P.B. and Zabrodin A., *'Fusion rules for quantum transfer matrices as a dynamical system on Grassmann manifolds'*. Modern Phys. Lett. A **12** (1997) no.19, 1369–1378.

[64] Majid S. *Foundations of quantum group theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[65] Macdonald I. G., *'Symmetric Functions and Hall Polynomials (Oxford Mathematical Monographs)'*, Oxford University Press, 1998.

[66] Mudrov A., *'Quantum conjugacy classes of simple matrix groups'*. arXiv:math.QA/0412538.

[67] Mudrov A. *Characters of $U_q(gl(m))$-reflection equation algebra*, Lett.Math.Phys 60 (2002) 283–291.

[68] Mudrov A. *On quantization of Semenov-Tian-Shansky Poisson bracket on simple algebraic groups* ArXiv: QA/0412360.

[69] Murphy G. E., *'On the representation theory of the symmetric groups and associated Hecke algebras'*, J. Algebra **152** (1992) 492-513.
Murphy G. E., *'The representations of Hecke algebras of Type A_n'*, J. Algebra **173** (1995) 97-121.

[70] Nazarov M.L., *'Quantum Berezinian and the classical Capelli identity'*. Lett. Math. Phys. **21** (1991) 123–131.

[71] Nazarov M., Tarasov V., *'Yangians and Gelfand-Zetlin bases'*. Publ RIMS **30** (1994) 459.

[72] Ogievetsky O. *Uses of Quantum Spaces*, Contemp. Math. 294, AMS, Providence, RI (2002) 161-232.

[73] Ogievetsky O. and Pyatov P., *'Lecture on Hecke algebras'*, in Proc. of the International School "Symmetries and Integrable Systems"Dubna, Russia, June 8-11, 1999. JINR, Dubna, D2,5-2000-218, pp.39-88; Preprint CPT-2000/P.4076 and MPI 01-40.

[74] Ogievetsky O.V. and Pyatov P.N., *'Orthogonal and symplectic quantum matrix algebras and Cayley-Hamilton theorem for them'*. Preprint MPIM 2005-53 (for uploads use http://www.mpim-bonn.mpg.de/html/preprints/preprints.html).

[75] Ogievetsky O.V., Pyatov P.N.,*'Cayley-Hamilton idenities for quantum matrix algebras of Birman-Murakami-Wenzl type'*, (готовится к публикации).

[76] Podles P. *Quantum spheres*, Lett.Math.Phys. **14** (1987) 193–202.

[77] Phung H.H. *Poincaré Series of Quantum spaces Associated to Hecke Operators*, Acta Math. Vietnam **24** (1999) 235–246.

[78] Polishchuk A., Positselski L. *Quadratic Algebras*, University Lecture Series, **37**, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.

[79] Pyatov P., Saponov P., *'Characteristic relations for quantum matrices'*. J. Phys. A: Math. Gen. **28** (1995) 4415 – 4421.

[80] Pragacz P. and Thorup A., *'On a Jacobi-Trudi identity for supersymmetric polynomials'*. Adv. Math. 95 (1992) no.1, 8–17.

[81] Ram A., *'Seminormal representations of Weyl groups and Iwahori-Hecke algebras'*, Proc. of London Math. Soc. **75** (1997) 99-133, [arXiv:math.RT/9511223].

[82] Rieffel M. *Deformation quantization of Heisenberg manifolds*, CMP 122 (1989) 531–562.

[83] Решетихин Н.Ю., Тахтаджян Л.А, Фаддеев Л.Д., *'Квантование групп и алгебр Ли'*, Алгебра и анализ, том 1, вып. 1 (1989) 178–206.

[84] Saponov P. *The Weyl approach to the representation theory of reflection equation algebra*, J. Phys. A: Math. Gen. **37** (2004) 5021–5046.

[85] Sergeev A.N., *'The invariant polynomials on simple Lie superalgebras'*. Represent. Theory **3** (1999) 250–280.

[86] Sergeev A.N., *'The tenzor algebra of the identical representation as a module over the Lie superalgebras* $\mathfrak{Gl}(n,m)$ *and* $Q(n)$*'*. Mat. Sbornik **123** (1984) no.3, 422–430 (in Russian). English translation in: Sb. Math. **51** (1985) no.2, 419–427.

[87] Sheu A. *Quantization of the Poisson* $SU(2)$ *and Its Poisson Homogeneous Space-The 2-Sphere*, CMP **135** (1991) 217–232.

[88] Stembridge J.R., *'A Characterization of Supersymmetric Polynomials'*. J. Algebra **95** (1985) 439–444.

[89] Semenov-Tian-Shansky *Dressing transformations and Poisson group actions*, Publ. Res. Ins. Math. Sci., **21** (1985) 1237-1260.

[90] Semenov-Tyan-Shanskii M. A., *Poisson-Lie groups. The quantum duality principle and the twisted quantum double*, Teoret. Mat. Fiz. **93**, no. 2 (1992) 302–329

[91] Sturmfels B., *'Algorithms in Invariant Theory'*. Texts and Monographs in Symbolic Computation. Springer-Verlag, Vienna, 1993.

[92] Trishin I.M., *'On representations of the Cayley-Hamilton equation in the supercase'*. Comm. in Algebra **27** (1999) 261–287.

[93] Turaev V. *Quantum invariant of knots and 3-manifolds* W.de Gruyter, Berlin, 1994.

[94] Tuba I. and Wenzl H., *'On braided tensor categories of type BCD'*. J. Reine Angew. Math. 581 (2005), 31–69; arXiv:math.QA/0301142.

[95] Wenzl H. *Hecke algebras of type A_n and subfactors*, Invent. Math. **92** (1988) 349–383.

[96] H.Weyl *The classical groups. Their invariants and representations*, Princeton University Press, Princeton, N.J. 1939.

[97] Woronowicz S. *Differential Calculus on Compact Matrix Pseudogroups (Quantum groups)*, CMP **122** (1989) 125–170.

[98] Zhang J.J., *'The quantum Cayley-Hamilton theorem'*. J. Pure Appl. Algebra **129** (1998) no.1, 101–109.

[99] Zhang R.B. *Structure and representations of the quantum general Linear supergroup*, CMP **195** (1998) 525–547.